H_∞-Regelung eines aktiven Pkw-Fahrwerks

Diplomarbeit

angefertigt von
cand. kyb. M. Brandstetter

bei
Herrn Dipl. Ing. S. Maier
Abt. EGB2
Dr. Ing. h.c. F. Porsche AG

und
Herrn Prof. Dr. Ing. A. Kistner
Institut A für Mechanik
Universität Stuttgart

März 1992

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als freier Mitarbeiter in der Abteilung *Entwicklung Gesamtfahrzeug Berechnung (EGB2)* bei der Firma Dr. Ing. h.c. F. Porsche AG.

Allen Mitarbeitern der Abteilung möchte ich für das gute Arbeitsklima und die stete Bereitschaft zu fachlichen (und nicht fachlichen) Diskussionen danken. Mein Dank für die gute Zusammenarbeit gilt dabei insbesondere Herrn Dipl. Ing. S. Maier, Herrn Dipl. Ing. G. Preschany und Herrn Dipl. Ing. L. Witte.

Herrn Prof. Dr. Ing. A. Kistner am Institut A für Mechanik, Universität Stuttgart, danke ich für die Betreuung und engagierte Förderung dieser Arbeit seitens der Hochschule.

März 1992 Markus Brandstetter

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Gegenstand der Arbeit ist die H_∞-Regelung eines aktiven Pkw-Fahrwerks. Der H_∞-Entwurf ist ein modernes Frequenzbereichsverfahren zur Regelung von Mehrgrößensystemen. Frequenzbereichsverfahren erlauben auf anschauliche Weise praxisrelevante Forderungen an den Regelkreis in Regelalgorithmen zu übersetzen [29]. U. a. können Robustheitsanforderungen explizit berücksichtigt werden.

Die ständig steigenden Ansprüche der modernen Automobilgesellschaft hinsichtlich Fahrverhalten und Komfort der Fahrzeuge stoßen an die Grenze des derzeit technisch Machbaren. Während die Entwicklung der konventionellen — in ihrer Konzeption schon über 100 Jahre alten — Radaufhängung stagniert, und der zwischen Komfort und Fahrsicherheit gefundene Kompromiß bei der Abstimmung des Fahrwerks nur noch von der Herstellerphilosophie abhängig ist, ersetzen zukünftige Entwicklungen die passive Radaufhängung durch aktive Systeme [4, 33].

Mit Hilfe moderner Regelungsstrategien sollen die zwischen Aufbau und Rad wirkenden Kräfte aktiv beeinflußt werden, um die Fahrdynamik über die begrenzte Leistungsfähigkeit passiver Systeme hinaus zu optimieren. Ziel der Regelung ist, sowohl hinsichtlich der sich ergebenden Aufbaubeschleunigungen als auch der dynamischen Radlastschwankungen deutliche Verbesserungen gegenüber der klassischen Radführung zu erreichen. Das aktive Eingreifen in die Vertikaldynamik eröffnet zusätzlich neue Möglichkeiten für ein Gesamtkonzept zur Fahrwerksregelung, z. B. Beeinflußbarkeit der Horizontaldynamik in der Kurve. Die im Fahrzeug integrierten Steuergeräte ermöglichen eine leichte Implementierung der Regelalgorithmen. Für die Krafterzeugung ist ein volltragender Hydraulikzylinder zwischen Fahrzeugaufbau und Rad vorgesehen.

In Abschnitt 2 wird ein lineares zeitinvariantes Modell der *einfach wirkenden Hydropneumatik* (EWHP) entwickelt. Abschnitt 3 stellt dem EWHP Modell ein einfacheres Zweimassenmodell gegenüber. In Abschnitt 4 wird auf die H_∞-Theorie eingegangen; es werden die für den Reglerentwurf erforderlichen Konzepte eingeführt. Die Ergebnisse des Reglerentwurfs sind in Abschnitt 5 dargestellt. In einer abschließenden Zusammenfassung werden die Ergebnisse dieser Arbeit diskutiert und gewertet.

In Teil A des Anhangs ist das mit dieser Arbeit entstandene Werkzeug dokumentiert. Anhand der Programmstruktur wird der Algorithmus erklärt. In Teil B sind verschiedene Entwurfsbeispiele zusammengestellt, die für den Test des Werkzeugs verwendet worden sind.

2 EWHP Modell

Untersuchungsgegenstand der Modellbildung ist die Vertikaldynamik eines Pkw-Fahrwerks, Wank- und Nickbewegungen werden nicht betrachtet. Das Viertelfahrzeugmodell wird als repräsentativer Modellausschnitt gewählt.

Die einfach wirkende Hydropneumatik ist ein erweitertes Zweimassenmodell (vgl. Abschnitt 3). Die Funktionsweise wird als einfach wirkend bezeichnet, weil Öl nur oberhalb des Kolbens zu- bzw. abgeführt werden kann (s. Abbildung 2.1). Das Wort Pneumatik bezieht sich auf das im Speicher eingeschlossene Luftvolumen.

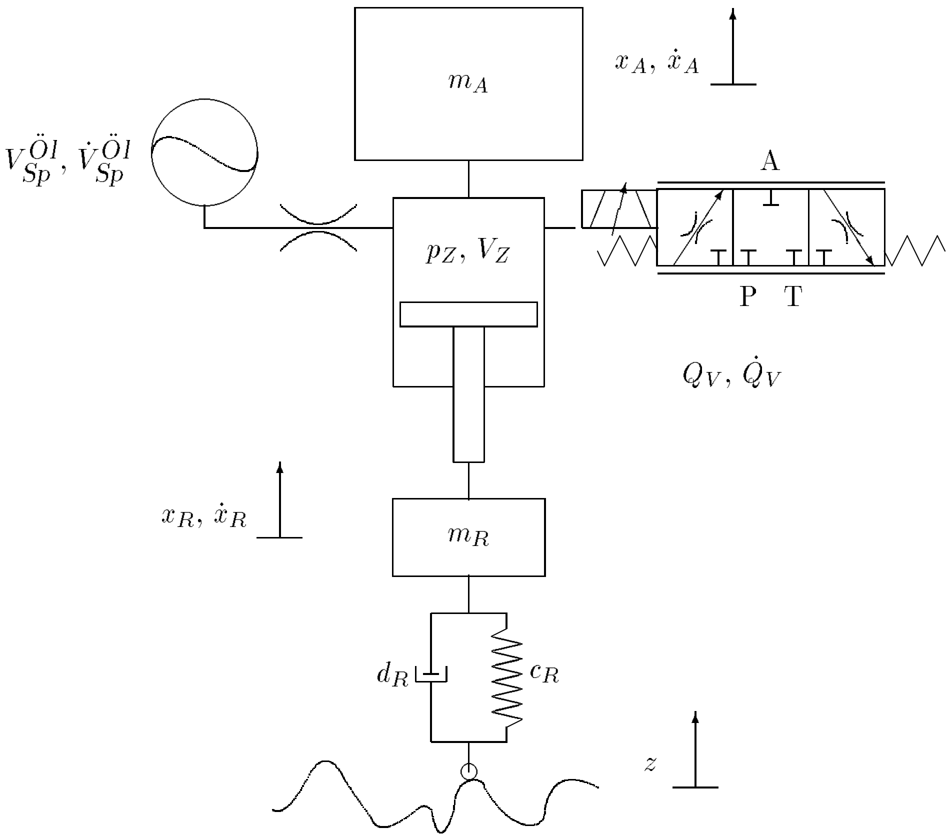


Abbildung 2.1: Schemazeichnung des EWHP Modells

Die Berücksichtigung der hydraulischen Komponenten erhöht die Komplexität des Modells beträchtlich. Die Modellierung der Druckschwingungen und der pulsierenden Volumenströme im Ölkreislauf erweist sich als äußerst schwierig. Die adäquate Beschreibung der Physik steht zudem im Gegensatz zu der Forderung nach einem einfachen Modell.

Ausgehend von einem vorliegenden nichtlinearen ACSL Modell wird in den folgenden Abschnitten eine lineare Zustandsbeschreibung der EWHP entwickelt. Die Starrkörpermechanik des Zweimassenmodells als Basis des EWHP Modells wird in Abschnitt 2.1 diskutiert. Die Beschreibung der Hydraulik gliedert sich in die Abschnitte 2.2, 2.3 und 2.4. Die Fahrbahn wird in Abschnitt 2.5 modelliert. In Abschnitt 2.6 werden die einzelnen Teilmodelle zu einem Zustandsmodell zusammengefaßt.

Aufgrund numerischer Schwierigkeiten, die aus der Strukturkopplung von Mechanik und Hydraulik resultieren, gehen die physikalischen Größen nicht durchweg in SI-Einheiten in die Modellgleichungen ein. Die Zahlen in einzelnen Gleichungen sind auf die Umrechnung der Einheiten zurückzuführen.

Die verwendeten Bezeichner sind jeweils am Ende eines Abschnitts zusammengestellt. Jeder Bezeichner wird aus Platzgründen nur einmal aufgeführt. Die Einheiten der bei der Linearisierung eingeführten Koeffizienten werden zugunsten der Anschaulichkeit ungekürzt angeben. Zahlenwerte sind ebenfalls in der Bezeichnerliste enthalten.

2.1 Mechanik

Es sollen die Bewegungsgleichungen für Aufbau und Rad mit Hilfe von Impulsbilanzen hergeleitet werden. Die auf den Kolben wirkende Kraft infolge der Druckschwingungen um das Gleichgewicht im Zylinder sei

$$F_K = p_Z \cdot A_K \,. \tag{2.1}$$

Die Bewegung der Kolbenstange im Zylinder ist reibungsbehaftet. Für den intessierenden Fall der Gleitreibung ist die auftretende Reibkraft F_R als Stribeckreibung modelliert. Mit der geschwindigkeitsabhängigen Reibungszahl

$$Stribeck = \left[a \cdot \left(\left|\dot{x}_A - \dot{x}_R\right| / dvmax\right)^b + c\right] \cdot \exp\left[d \cdot \left|\dot{x}_A - \dot{x}_R\right| / dvmax\right] + e \tag{2.2}$$

und der Druckkraft F_K gilt für die Stangenreibung

$$F_R = \left|Stribeck \cdot F_K\right| \cdot \mathrm{sign}(p_Z)\,, \tag{2.3}$$

die Richtung von F_R ist durch das Vorzeichen des Drucks gegeben. Um den Effekt der Reibung im linearen Modell zumindest qualitativ zu erfassen, wird anstelle von Gleichung (2.3) der geschwindigkeitsproportionale Ansatz

$$Reibung = -r \cdot (\dot{x}_A - \dot{x}_R) \tag{2.4}$$

gewählt. Die Richtung der Gleitreibung ist damit durch die relative Bewegung festgelegt, was physikalisch sinnvoller erscheint; die aus der Vernachlässigung der Druckabhängigkeit resultierenden Modellfehler müssen jedoch hingenommen werden.

Die Größenordnung der Reibkräfte wird durch die bei der Regelung des Zweimassenmodells auftretenden Stellkräfte überschlägig abgeschätzt (s. Abschnitte 3 und 5). Als maximale Kraft werden 10000 N angenommen. In Abbildung 2.2 ist der Betrag der Reibkraft über der Relativgeschwindigkeit dargestellt. Der Proportionalitätsfaktor r ergibt sich als Steigung der Regressionsgeraden.

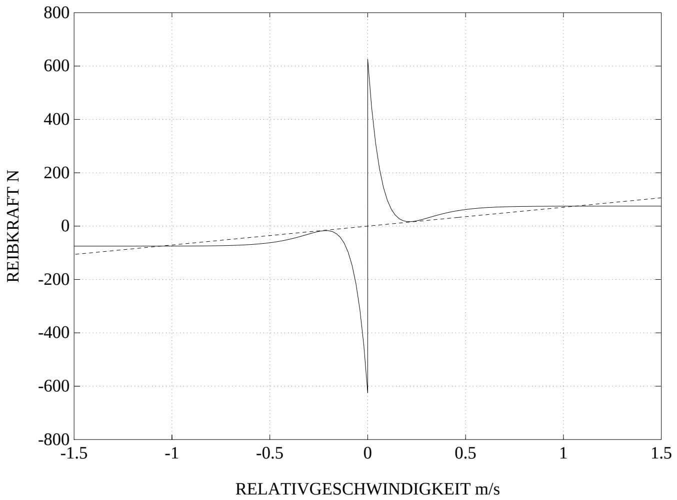


Abbildung 2.2: Geschwindigkeitsproportionaler Ersatzterm für die Stribeckreibung

Mit den gemachten Vereinfachungen können zwei gekoppelte lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung als Bewegungsgleichungen angegeben werden:

$$\ddot{x}_A = (p_Z \cdot A_K + Reibung)/m_A \tag{2.5}$$

$$\ddot{x}_R = -(p_Z \cdot A_K + c_R \cdot (x_R - z) + d_R \cdot (\dot{x}_R - \dot{z}) + Reibung)/m_R. \tag{2.6}$$

Bezeichner:

a, b, c, d, e ... Parameter der Stribeckreibung

$$[\,a \quad b \quad c \quad d \quad e\,] = [\,-4.855 \quad 1 \quad 0.055 \quad -1e2 \quad 0.008\,]\,.$$

c_R ... Federkonstante des Reifens (300000 N/m).

d_i ... Kolbendurchmesser (2.8 cm)

d_R ... Dämpferkonstante des Reifens (400 Ns/m).

dv_{max} ... maximale Relativgeschwindigkeit ($10\, m/s$).

m_A ... anteilige Aufbaumasse ($350\, kg$).

m_R ... Radmasse ($45\, kg$).

p_Z ... Druck im Zylinder in N/cm^2.

r ... Reibungskoeffizient (71 N/(m/s)) .

x_A ... Lagekoordinate der Aufbaumasse in m.

x_R ... Lagekoordinate der Radmasse in m.

z ... Fahrbahnunebenheit in m.

A_K ... Kolbenquerschnitt in cm^2 ($A_K = \pi/4 \cdot d_i^2$).

2.2 Zylinder

Der Hydraulikzylinder ist das Leistungsteil im Ölkreislauf. Er wird über ein Servoventil angesteuert (s. Abschnitt 2.4). Während konventionelle Fahrzeugfederungssysteme rein passive Eigenschaften haben, können durch Druckmodulationen im Zylinder Kräfte zwischen Fahrzeugaufbau und Rad aktiv erzeugt werden.

Der thermodynamische Zustand des Öls im Zylinder ist durch Druck und Volumen eindeutig charakterisiert. Die Modellierung über eine thermische Zustandsgleichung wäre jedoch sehr aufwendig und nur unzureichend möglich. Stattdessen wird das Öl durch seine Kompressibilität beschrieben:

$$\dot{p}_{Z\,abs} = E_Z / V_Z \cdot \dot{V}_Z \,. \tag{2.7}$$

Die Kompressibilitätsgleichung und eine Bilanzierung des Ölvolumens ersetzen die thermische Zustandsgleichung näherungsweise, der Einfluß der Temperatur wird vernachlässigt:

$$\dot{V}_Z = -d\dot{V}_Z - \dot{V}_{Sp}^{\ddot{O}l} + Q_V \,. \tag{2.8}$$

Druck und Volumen sind ohne Eigendynamik modelliert. Die Gleichungen (2.7) und (2.8) wirken als Integratoren im System.

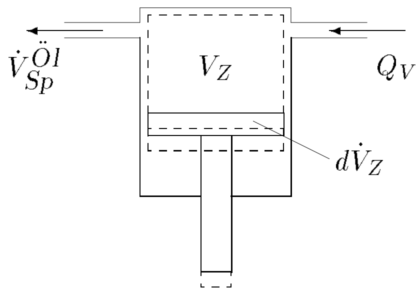


Abbildung 2.3: Bilanz des Ölvolumens im Zylinder

Abbildung 2.3 zeigt den Bilanzraum und die einzelnen Anteile der Volumenbilanz. Die Abmessungen des Bilanzraums ändern sich in Abhängigkeit von der Relativgeschwindigkeit zwischen Aufbau und Rad. Die Kompression des Öls durch die Kolbenbewegung geht mit dem Term

$$d\dot{V}_Z = A_K \cdot 1e2 \cdot (\dot{x}_A - \dot{x}_R) \tag{2.9}$$

in die Volumenbilanz ein. Die rechte Seite der Gleichung (2.8) ist damit linear in $\dot{x}_A$, $\dot{x}_R$, $\dot{V}_{Sp}^{\ddot{O}l}$ und Q_V.

Linearisiert man Gleichung (2.7) mit $p_{Z\,abs} = p_Z + p_{Z\,0}$ um $p_{Z\,0}$, so erhält man

$$\dot{p}_Z = z_1 \cdot (\dot{x}_A - \dot{x}_R) + z_2 \cdot \dot{V}_{Sp}^{\ddot{O}l} - z_2 \cdot Q_V + z_3 \cdot V_Z \,, \tag{2.10}$$

mit den Koeffzienten

$$z_1 = [-E_Z \cdot A_K \cdot 1e2/V_Z]_S \,, \tag{2.11}$$

$$z_2 = [-E_Z/V_Z]_S \,, \qquad z_3 = \left[-E_Z/V_Z^2 \cdot \dot{V}_Z\right]_S \,. \tag{2.12}$$

Für die Berechnung des Koeffizienten z_3 wird ein stationärer Ölvolumenstrom $\dot{V}_{Z\,S}$ von $100\,cm^3/s$ angenommen.

Die sich mit dem Zylinder als Verbindungsstück zwischen Aufbau und Rad ergebenden Kopplungen der mechanischen und hydraulischen Freiheitsgrade werden für das lineare Modell durch die Gleichungen (2.8) und (2.10) abgebildet.

Bezeichner:

d_a ... Zylinderdurchmesser ($4\,cm$).

l_0 ... Länge des Zylinders ($20\,cm$).

$p_{Z\,0}$ ... Anfangswert des absoluten Öldrucks im Speicher in N/cm^2

$$p_{Z\,0} = m_A \cdot g/A_K \,.$$

z_1, z_2, z_3 ... Systemparameter (Zylinder).

A_Z ... Zylinderquerschnitt in cm^2 ($A_Z = \pi/4 \cdot d_a^2$).

E_Z ... Elastizitätsmodul des Öls ($15000\,N/cm^2$).

Q_V ... Ölvolumenstrom des Ventils in cm^3/s.

$V_{Sp}^{\ddot{O}l}$ ... Ölvolumen im Speicher in cm^3.

V_Z ... Ölvolumen im Zylinder in cm^3.

$V_{Z\,0}$ ... Anfangswert des Ölvolumens im Zylinder in cm^3.

$$V_{Z\,0} = A_Z \cdot l_0/2 + (A_Z - A_K) \cdot l_0/2 \,.$$

2.3 Speicher und Leitung

Um die hochdynamischen Vorgänge in der Hydraulik für eine Beruhigung der Aufbaubewegung ausnutzen zu können, ist ein Ölspeicher an den Zylinder angeschlossen, der die auftretenden Druckstöße im Zylinder begrenzt. Die Drosselwirkung der Leitung zum Behälter führt zu einer zusätzlichen Verlangsamung der Dynamik.

Für den Speicher und die Zuleitung kann eine nichtlineare Differentialgleichung 2. Ordnung angegeben werden:

$$\ddot{V}_{Sp}^{\ddot{O}l} = \left(p_Z - p_{Sp}^{\ddot{O}l}\right) \cdot A_{Sp} \Big/ \left(\rho_{\ddot{O}l} \cdot l_{Sp}\right) \cdot 1e5 - \dot{V}_{Sp}^{\ddot{O}l} \cdot \left|\dot{V}_{Sp}^{\ddot{O}l}\right| \cdot \eta_{Sp} \Big/ \left(2 \cdot l_{Sp} \cdot A_{Sp}\right) . \tag{2.13}$$

Durch den Widerstandsbeiwert der Leitung η_{Sp} ist die Drosselung des Volumenstroms $\dot{V}_{Sp}^{\ddot{O}l}$ erfaßt mit

$$\eta_{Sp} = \begin{cases} 0.64 & , \left|\dot{V}_{Sp}^{\ddot{O}l}\right| = 0 \\ \dfrac{2 \cdot \left|F_D\left(\dot{V}_{Sp}^{\ddot{O}l}\right)\right| \cdot A_{Sp}^2}{\dot{V}_{Sp}^{\ddot{O}l\,2} \cdot \rho_{\ddot{O}l} \cdot \pi/4 \cdot d_i^2} \cdot 1e5 & , \left|\dot{V}_{Sp}^{\ddot{O}l}\right| > 0 \end{cases} . \tag{2.14}$$

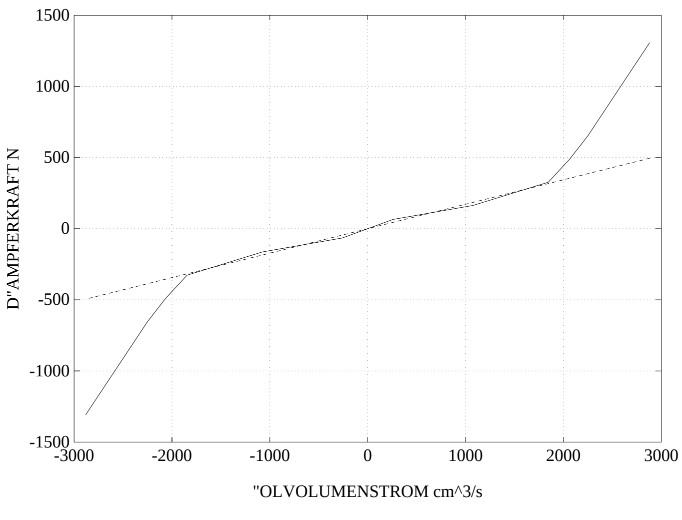


Abbildung 2.4: Dämpferkraftkennlinie der Drossel $F_D\left(\dot{V}_{Sp}^{\ddot{O}l}\right)$

Die Dämpferkraft der Drossel als Funktion des Volumenstroms $\dot{V}_{Sp}^{Öl}$ ist in Abbildung 2.4 gezeigt. Für die weitere Modellbildung wird die Kennlinie durch die Beziehung $F_D = k \cdot \dot{V}_{Sp}^{Öl}$ approximiert (unterbrochene Linie in Abbildung 2.4). Mit den Abkürzungen

$$d_1 = \frac{A_{Sp}}{\rho_{Öl} \cdot l_{Sp}} \cdot 1e5 \tag{2.15}$$

und

$$d_2 = \frac{k \cdot A_{Sp}}{\rho_{Öl} \cdot l_{Sp} \cdot A_K} \cdot 1e5 = \frac{k}{A_K} \cdot d_1 \tag{2.16}$$

schreibt man einfacher für Gleichung (2.13):

$$\ddot{V}_{Sp}^{Öl} = d_1 \cdot \left(p_Z - p_{Sp}^{Öl} \right) - d_2 \cdot \dot{V}_{Sp}^{Öl} . \tag{2.17}$$

Die folgenden Umformungen eliminieren $p_{Sp}^{Öl}$ in Gleichung (2.17), damit das Modell durch eine minimale Anzahl von Zuständen realisiert werden kann. An der Membran, die das im Speicher eingeschlossene Luftvolumen vom Ölkreislauf trennt, gilt die Übergangsbedingung:

$$\dot{V}_{Sp}^{Luft} = -\dot{V}_{Sp}^{Öl} . \tag{2.18}$$

Die Zustandsänderung der Luft sei adiabat; mit $p_{Sp\,abs}^{Luft} = p_{Sp}^{Luft} + p_{Sp\,0}^{Luft}$ kann für ideale Verhältnisse geschrieben werden:

$$p_{Sp\,abs}^{Luft} = p_{Sp\,0}^{Luft} \cdot \left(\frac{V_{Sp\,0}^{Luft}}{V_{Sp}^{Luft}} \right)^{\kappa} . \tag{2.19}$$

Im Gleichgewicht gilt $p_{Sp}^{Öl} = p_{Sp}^{Luft}$. Ableiten der rechten Seite von Gleichung (2.19) nach V_{Sp}^{Luft} und Einsetzen der Übergangsbedingung führt auf den gesuchten Zusammenhang

$$p_{Sp}^{Öl} = l \cdot V_{Sp}^{Öl} \tag{2.20}$$

mit

$$l = \left[p_{Sp\,0}^{Luft} \cdot \kappa \cdot \left(\frac{V_{Sp\,0}^{Luft}}{V_{Sp}^{Luft}} \right)^{\kappa - 1} \cdot \frac{V_{Sp\,0}^{Luft}}{V_{Sp}^{Luft\,2}} \right]_S . \tag{2.21}$$

Setzt man $d'_1 = d_1 \cdot l$, so ergibt sich anstelle von (2.13) die einfachere lineare Differentialgleichung:

$$\ddot{V}_{Sp}^{Öl} = -d'_1 \cdot V_{Sp}^{Öl} - d_2 \cdot \dot{V}_{Sp}^{Öl} + d_1 \cdot p_Z \,. \tag{2.22}$$

BEZEICHNER:

d_1, d_2 ... Systemparameter (Drossel).

k ... Steigung der linearisierten Dämpferkraftkennlinie

$$k = 0.177\, N/\left(cm^3/s\right) \,.$$

l ... linearisierte adiabatische Zustandsänderung der Luft im Speicher

$$l = 5.799\, \left(N/cm^2\right)/cm^3 \,.$$

l_{Sp} ... Länge der Leitung ($5\, cm$).

p_{Sp}^{Luft} ... Luftdruck im Speicher in N/cm^2.

$p_{Sp\,0}^{Luft}$ ... Anfangswert des absoluten Luftdrucks im Speicher in N/cm^2

$$p_{Sp\,0}^{Luft} = m_A \cdot g/A_K \,.$$

$p_{Sp}^{Öl}$ ... Öldruck im Speicher in N/cm^2.

A_{Sp} ... Querschnitt der Leitung zum Ölspeicher ($0.01\, cm^2$).

F_D ... Dämpferkraft der Drossel in N.

V_{Sp}^{Luft} ... Luftvolumen im Speicher in cm^3.

η_{Sp} ... Widerstandsbeiwert der Drossel.

κ ... Adiabatenexponent (1.3).

$\rho_{Öl}$ ... Dichte des Öls ($0.88\, kg/l$).

2.4 Ventil

Die Modellierung der Stellglieddynamik ist ein weiteres Element des EWHP Modells. Das Teilmodell Ventil integriert die Ansteuerung des Hydraulikzylinders in das Gesamtmodell.

Der Ölvolumenstrom durch das Ventil ist eine Funktion des freigegebenen Strömungsquerschnitts, der durch die Steuerspannung u verändert werden kann, und des Differenzdrucks Δp zwischen dem Systemdruck des Ölkreislaufs p_{Sys} und dem Druck im Zylinder:

$$\Delta p = p_{Sys} - p_{Z\,abs}\,. \tag{2.23}$$

Der Drosseleffekt wird durch einen der Durchflußzahl nachempfundenen Beiwert ζ_p beschrieben:

$$\zeta_p = p_5 \cdot \arctan\left(\frac{p_4 \cdot |u|^{p_1}}{p_2 + \Delta p^{\,p_3}}\right)\,. \tag{2.24}$$

Mit dem Beiwert ζ_p gilt für stationäre Strömungsverhältnisse im Ventil die Gleichung:

$$Q'_V = \zeta_p \cdot \sqrt{2/\rho_{\ddot{O}l} \cdot \Delta p \cdot 10} \cdot 1e2 \cdot \mathrm{sign}(u)\,, \tag{2.25}$$

wobei die Richtung des Ölvolumenstroms durch das Vorzeichen der Steuerspannung gegeben ist.

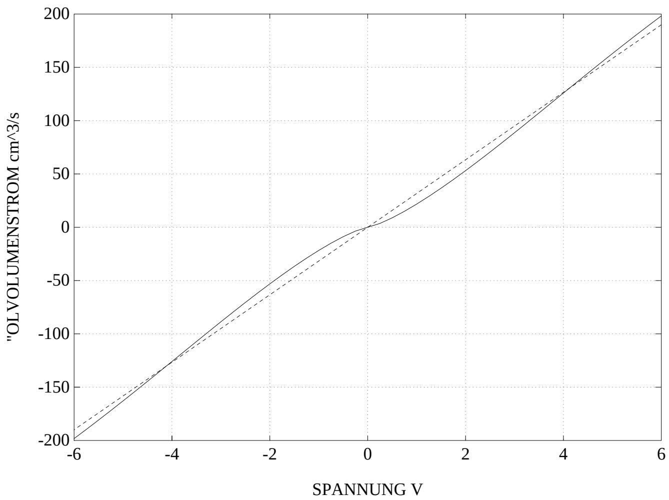


Abbildung 2.5: Linearisierung der Ventilkennlinie

Anstelle des Ausdrucks $\zeta_p \cdot \sqrt{2/\rho_{\ddot{O}l} \cdot \Delta p \cdot 10} \cdot 1e2$ wird ein linearer Zusammenhang zwischen dem Volumenstrom Q'_V und der Spannung u angenommen. Die Gleichung (2.25) wird ersetzt durch

$$Q'_V = v \cdot u\,. \tag{2.26}$$

Auf eine Berücksichtigung der Druckabhängigkeit muß verzichtet werden, weil der Term $\left[\frac{\partial \circ}{\partial p_Z}\right]_S \cdot p_Z \cdot \mathrm{sign}(u)$ im Rahmen einer linearen Modellierung nicht behandelt werden kann. Die tote Zone des Ventils im Bereich des Umschaltpunkts wird im Modell dadurch erfaßt, daß die Ableitung von ζ_p nach $|u|$ im Betriebspunkt Null ist:

$$v = \left[p_5 \cdot 1 \Big/ \left[1 + \left(\frac{p_4 \cdot |u|^{p_1}}{p_2 + \Delta p^{p_3}}\right)^2\right] \cdot \frac{p_4 \cdot p_1 \cdot |u|^{p_1 - 1}}{p_2 + \Delta p^{p_3}} \cdot \sqrt{2/\rho_{\ddot{O}l} \cdot \Delta p \cdot 10} \cdot 1e2\right]_S\,. \tag{2.27}$$

Aus diesem Grund wird zur Bestimmung der Steigung v in Gleichung (2.26) eine Ausgleichsgerade über dem Arbeitsbereich des Ventils berechnet (s. Abbildung 2.5). Die zeitliche Dynamik des Stellglieds ist als PT$_2$-Verhalten modelliert.

$$Q_V(s) = \frac{K}{T_2^2 s^2 + T_1 s + 1} \cdot Q'_V(s)\,. \tag{2.28}$$

BEZEICHNER:

p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 ... Parameter der Ventilkennlinie

$$[\,p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad p_4 \quad p_5\,] = [\,1.3 \quad 1e3 \quad 1.5 \quad 150 \quad 12\,l/min^1\,]\,.$$

p_{Sys} ... Systemdruck ($1800\,N/cm^2$).

u ... Steuerspannung in V.

v ... Steigung der Ausgleichsgeraden

$$v = 32.797\;\left(cm^3/s\right)/V\,.$$

K, T_1, T_2 ... Parameter der Ventilübertragungsfunktion

$$[\,K \quad T_1 \quad T_2\,] = [\,1.078 \quad 3.183e{-}3 \quad 3.183e{-}3\,]\,.$$

ζ_p ... Widerstandsbeiwert des Ventils in cm^3/s.

Δp ... Druckdifferenz zwischen Pumpe und Zylinder in N/cm^2.

[1] Das Übertragungsverhalten des Ventils wurde ursprünglich ausgehend von den Herstellerangaben an einen Volumenstrom Q_V in l/min angepaßt. Im ACSL Modell wird aus numerischen Gründen mit Volumenströmen in cm^3/s gerechnet, so daß sich für den Parameter p_5 ein korrigierter Wert von $12 \cdot 1000/60\;\left(cm^3/s\right)/V$ ergibt.

2.5 Fahrbahn

Das EWHP Modell ist bedingt durch die Unebenheiten im Fahrbahnprofil einer stochastischen Anregung ausgesetzt. In [2] werden Fahrbahnunebenheiten mit Hilfe von Formfiltern (ARMA-Modellen) beschrieben. Formfilter sind spezielle Übertragungssysteme, die normal verteilte, stationäre, ergodische, mittelwertfreie Rauschsignale z auf weißes Rauschen ξ zurückführen. Das Formfilter ist charakterisiert durch die Differenzengleichung

$$\begin{aligned} z_k &= a_1 z_{k-1} + a_2 z_{k-2} + \cdots + a_n z_{k-n} + \ldots \\ &\quad + b_0 \xi_k + b_1 \xi_{k-1} + \cdots + b_m \xi_{k-m} \,. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Die z-Transformation der Differenzengleichung führt auf den Frequenzgang des Filters. Mit $z = e^{j\Omega\Delta s}$ ergibt sich

$$F(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}}{1 - a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}} \,. \tag{2.30}$$

Ω ist die Ortsfrequenz in $1/m$, Δs bezeichnet die Schrittweite des Filters. Abbildung 2.6 zeigt die Amplitudengänge verschiedener Formfilter über der Ortsfrequenz Ω. Bei der Simulation auf dem Rechner bewegt sich das Fahrzeug mit der Geschwindigkeit v auf der Straße. Durch die Substitution $\omega = v\Omega$ wird aus dem Ortssignal z ein Zeitsignal.

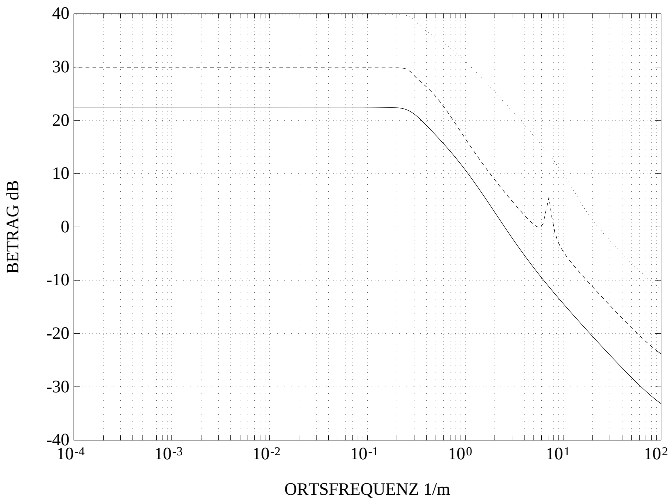


Abbildung 2.6: Amplitudengänge verschiedener Formfilter: gute Straße (durchgezogen), mäßige Straße (unterbrochen) und schlechte Straße (punktiert)

2.6 Zustandsmodell

In diesem Abschnitt wird eine Zustandsdarstellung für das EWHP Modell angegeben. Die in den Abschnitten 2.1, 2.2, 2.3 und 2.4 behandelten Teilmodelle werden zu einem Gesamtmodell zusammengefaßt. Als Zustandsvektor wird definiert:

$$x = \begin{bmatrix} x_A & \dot{x}_A & x_R & \dot{x}_R & V_{Sp}^{Öl} & \dot{V}_{Sp}^{Öl} & p_Z & V_Z & Q_V & \dot{Q}_V \end{bmatrix}^T . \tag{2.31}$$

Die Ausgangsgrößen des Systems sind die Lagekoordinaten und Geschwindigkeiten von Fahrzeugaufbau und Rad ($y = [\, x_A \quad \dot{x}_A \quad x_R \quad \dot{x}_R \,]^T$); Stellgröße ist die Steuerspannung u des Ventils. Eine Zustandsdarstellung des EWHP Modells ist:

$$\dot{x} = Ax + b_u u + b_z z \tag{2.32}$$

$$y = Cx + Du \tag{2.33}$$

mit der Dynamikmatrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_1/m_A & 0 & -r_1/m_A & 0 & 0 & A_K/m_A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r_1/m_R & -c_R/m_R & (r_1 - d_R)/m_R & 0 & 0 & -A_K/m_R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -d_1' & -d_2 & d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & 0 & -k_1 & 0 & k_2 & 0 & k_3 & -k_2 & 0 \\ 0 & -A_K \cdot 1e2 & 0 & A_K \cdot 1e2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/T_2^2 & -T_1/T_2^2 \end{bmatrix} \tag{2.34}$$

und dem Stellvektor

$$b_u = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad K \cdot v/T_2^2]^T \ . \tag{2.35}$$

Die Fahrbahnunebenheiten gehen als Störungen über den Vektor b_z in das Modell ein

$$b_z = [0 \quad 0 \quad 0 \quad c_R/m_R \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \ . \tag{2.36}$$

Die Ableitung des Störsignals $\dot{z}$ wird für das Modell nicht weiter betrachtet. Zum einen können die statistischen Eigenschaften des Signals nicht näher beschrieben werden, zum anderen ist die Verstärkung des Signals vergleichsweise klein (s. Abschnitt 2.1). Die Ausgangsgleichung ist durch die Meßmatrix C und den Durchgriff D definiert

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} . \tag{2.37}$$

Ergebnis der Modellbildung ist ein lineares Zustandsmodell 10. Ordnung. Durch eine numerische Linearisierung des ACSL Modells und Simulationen konnte die Herleitung des linearen Modells verifiziert werden. Die Pole des Systems liegen bei

$$\begin{aligned} &0,\ 0.53 \\ &-0.22 \pm 7.27\,i \\ &-4.48 \pm 70.67\,i \\ &-4.17 \pm 168.47\,i \\ &-157.08 \pm 272.07\,i. \end{aligned}$$

Um die Ordnung des Modells zu reduzieren, könnte u. U. die Ventildynamik als quasistationär angesehen werden. Die Eigenbewegung des Ventils ist im Vergleich zu den anderen Moden des Systems um Größenordnungen schneller und dabei wesentlich stärker gedämpft.

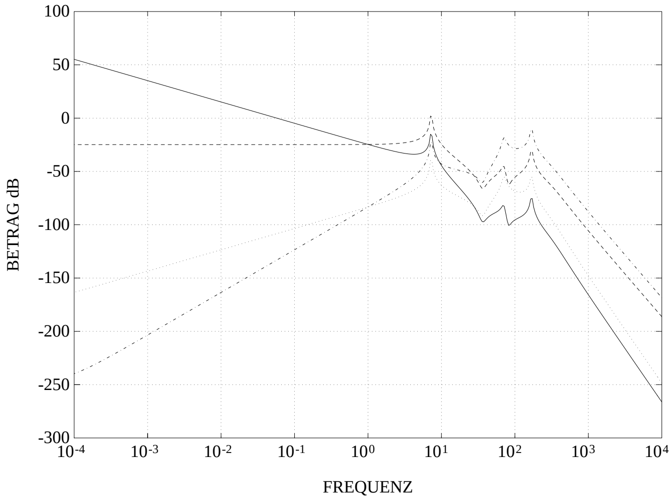


Abbildung 2.7: Bodediagramm des EWHP Modells (Amplitudenverläufe)

Die Abbildungen 2.7 und 2.8 zeigen das Übertragungsverhalten des EWHP Modells im Frequenzbereich. Die Linienausführung kennzeichnet die verschiedenen Systemausgänge: x_A (durchgezogen), $\dot{x}_A$ (unterbrochen), x_R (punktiert) und $\dot{x}_R$ (strichpunktiert).

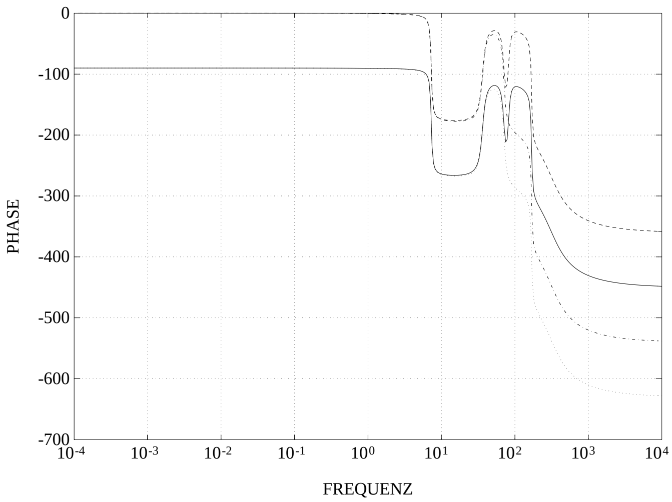


Abbildung 2.8: Bodediagramm des EWHP Modells (Phasenverläufe)

3 Zweimassenmodell (ZMM)

Das Zweimassenmodell kann als abstraktes Funktionsmodell der einfach wirkenden Hydropneumatik angesehen werden. Im Funktionsmodell ist die aufwendige Hydraulik durch eine unmittelbar zwischen Aufbau und Rad angreifende Kraft ersetzt. Für die Herleitung des Modells und eine ausführliche Systemanalyse sei auf [7] verwiesen.

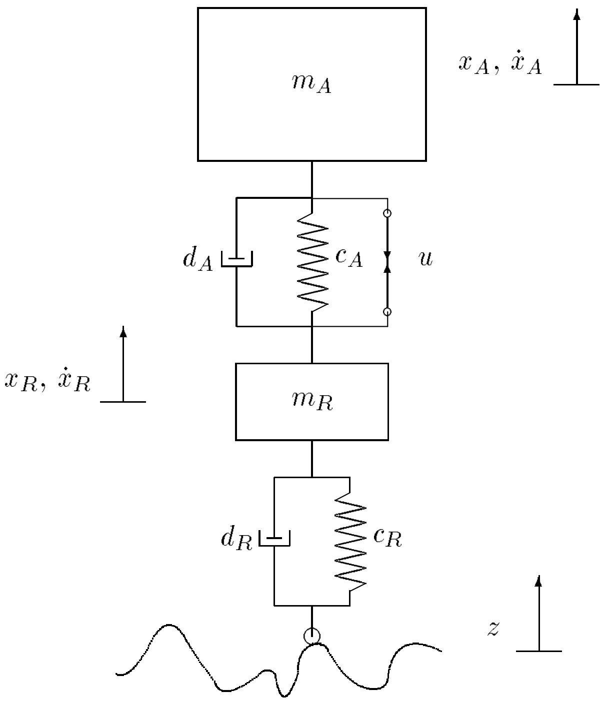


Abbildung 3.1: Schemazeichnung des Zweimassenmodells

Abweichend von [7] ist ein zusätzlicher Dämpfer am Rad modelliert (s. Abbildung 3.1). Eine Zustandsdarstellung des Zweimassenmodells ist entsprechend den Gleichungen (2.32) und (2.33) durch folgende Matrizen gegeben:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -c_A/m_A & -d_A/m_A & c_A/m_A & d_A/m_A \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ c_A/m_R & d_A/m_R & -(c_A+c_R)/m_R & -(d_A+d_R)/m_R \end{bmatrix}, \tag{3.1}$$

$$b_u = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/m_A \\ 0 \\ 1/m_R \end{bmatrix}, \quad b_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ c_R/m_R \end{bmatrix}, \tag{3.2}$$

und die Beobachtungs- bzw. Durchgangsmatrix

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} , \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} . \tag{3.3}$$

Die Bemerkungen in Abschnitt 2.6 bzgl. der Anregung des Systems durch die Fahrbahn gelten analog. Die Dynamik des Zweimassenmodells kann systemtheoretisch durch einen Doppelintegrierer (Aufbau) und ein schwingungsfähiges PT_2-Glied (Rad) beschrieben werden. Die Pole des Systems sind

$$\begin{aligned} &0,\, 0 \\ &-5.71 \pm 75.38\, i \ . \end{aligned}$$

Um einen Vergleich mit den in [7] vorgeschlagenen Zustandsreglern zu ermöglichen, wurden für die Modellparameter teilweise andere Zahlenwerte als in Abschnitt 2.1 gewählt.

BEZEICHNER:

c_A ... Federkonstante der Aufbaufeder ($0\, N/m$).

c_R ... Federkonstante des Reifens ($2e5\, N/m$).

d_A ... Dämpferkonstante des Aufbaudämpfers ($0\, Ns/m$).

d_R ... Dämpferkonstante des Reifens ($4e2\, Ns/m$).

m_A ... anteilige Aufbaumasse ($234\, kg$).

m_R ... Radmasse ($35\, kg$).

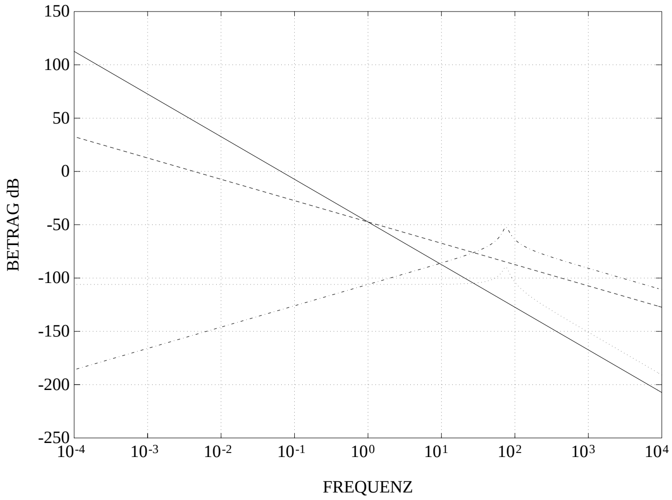


Abbildung 3.2: Bodediagramm des Zweimassenmodells (Amplitudenverläufe)

In den Abbildungen 3.2 und 3.3 sind die Amplituden- und Phasenverläufe des Zweimassenmodells gezeigt. Die verschiedenen Linientypen stellen die Übertragungskanäle dar: x_A (durchgezogen), $\dot{x}_A$ (unterbrochen), x_R (punktiert) und $\dot{x}_R$ (strichpunktiert).

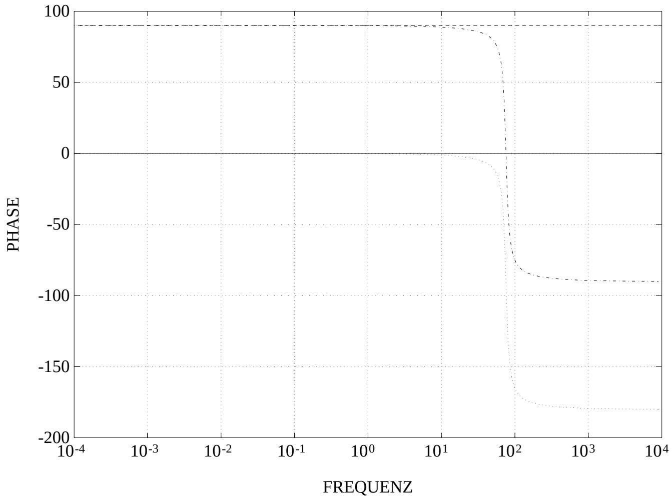


Abbildung 3.3: Bodediagramm des Zweimassenmodells (Phasenverläufe)

4 H_∞-Theorie

Der H_∞-Entwurf ist ein modernes Frequenzbereichsverfahren zur Regelung von Mehrgrößensystemen. Der Regler wird durch die Minimierung eines H_∞-Kostenfunktionals berechnet. Bei der Formulierung der H_∞-Optimierungsproblems können u. a. auch die Robustheitseigenschaften des Regelkreises bewertet werden.

Das Verfahren ist in zwei Schritte gegliedert: Zuerst werden die Anforderungen an den geschlossenen Kreis, wie z. B. Führungs- und Störverhalten, Stabilitätsreserve, Bandbreite, Robustheit etc., im Frequenzbereich formuliert. In einem zweiten Schritt erfolgt die Reglersynthese im Zustandsraum.

In Abschnitt 5 wird der NLKF Entwurf als Ansatz verwendet. Im Hinblick darauf sollen im folgenden die erforderlichen theoretischen Konzepte bereitgestellt werden. Die gewählte Darstellung ist lediglich ein kurzer Abriß der H_∞-Theorie. Ausführlichere theoretische Arbeiten zu diesem Thema sind [23] und [27]. Safonov gibt in [31] einen Überblick über neuere Entwicklungen auf dem Gebiet der H_∞-Theorie.

4.1 Grundlagen

a) H_∞-Norm einer Übertragungsmatrix

Definition 1 *Die H_∞-Norm einer Übertragungsmatrix $G \in \mathcal{RH}_\infty^{p\times q}$ ist*

$$\|G\|_\infty = \sup_\omega \bar{\sigma}\left[G(j\omega)\right] . \tag{4.1}$$

$\mathcal{RL}_\infty$ ist der Raum aller reell rationalen Übertragungsmatrizen, die keine Pole auf der imaginären Achse haben. $\mathcal{RH}_\infty$ ist der Raum aller stabilen Übertragungsmatrizen in $\mathcal{RL}_\infty$ [2].

b) Modelle linearer zeitinvarianter Übertragungssysteme

Lineare zeitinvariante Systeme können sowohl im Zeit- als auch im Frequenzbereich dargestellt werden. Für den Zusammenhang zwischen Zustandsraum und Laplacebereich gilt

$$G(s) = C\left(sI_n - A\right)^{-1} B + D\,. \tag{4.2}$$

Häufig wird anstelle von Gleichung (4.2) symbolisch geschrieben:

$$G(s) \cong \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] . \tag{4.3}$$

[2] Francis behandelt die Funktionalanalysis und Operatortheorie als mathematische Grundlagen der H_∞-Theorie in [8].

Eine weitere Möglichkeit, Mehrgrößensysteme zu beschreiben, ist, die Übertragungsmatrix als Produkt zweier koprimer Faktoren darzustellen. Der NLKF Entwurf geht von einer *normalisierten linkskoprimen Faktorisierung* der Regelstecke aus. Die folgenden Definitionen erklären die Begriffsbildung.

Definition 2 *$M \in \mathcal{RH}_\infty^{p\times p}$ und $N \in \mathcal{RH}_\infty^{p\times q}$ haben dieselbe Anzahl von Zeilen. M und N sind linkskoprim, wenn zwei Matrizen $U, V \in \mathcal{RH}_\infty$ existieren, so daß gilt*

$$MV - NU = I\,. \tag{4.4}$$

Definition 3 *$M \in \mathcal{RH}_\infty^{p\times p}$ und $N \in \mathcal{RH}_\infty^{p\times q}$ seien linkskoprime Matrizen. $[\,N \quad M\,]$ ist eine linkskoprime Faktorisierung der Übertragungsmatrix $G \in \mathcal{R}^{p\times q}$, wenn gilt*

$$G = M^{-1}N\,. \tag{4.5}$$

Die linkskoprime Faktorisierung $[\,N \quad M\,]$ heißt normalisiert, wenn zusätzlich gilt

$$NN^\star + MM^\star = I \qquad \forall\, s\,. \tag{4.6}$$

c) Systeme mit unstrukturierten Modellfehlern

Ein möglicher Ansatz zur mathematischen Behandlung von Modellunsicherheit ist, Klassen von unstrukturierten Modellfehlern einzuführen. Sie beschreiben eine Umgebung des nominellen Modells, in der das reale Modell enthalten sein soll. Als Beispiel wird die Klasse faktorisierter Modellfehler betrachtet:

$$\mathcal{D}_{MN} = \left\{[\,\Delta_M \quad \Delta_N\,] \;\middle|\; \bar\sigma\,[\,\Delta_M(j\omega) \quad \Delta_N(j\omega)\,] < l_{MN}(j\omega)\right\}\,. \tag{4.7}$$

Mit den faktorisierten Fehlern Δ_N und Δ_M ist die Umgebung des nominellen Modells $G = M^{-1}N$ definiert durch:

$$G_\Delta = (M + \Delta_M)^{-1}\,(N + \Delta_N)\,. \tag{4.8}$$

Analog können Klassen additiver Fehler $\mathcal{D}_A$ bzw. multiplikativer Fehler $\mathcal{D}_P$ definiert werden [27]. Während diese Fehlerklassen der zusätzlichen Einschränkung

$$\eta\,(G) = \eta\,(G_\Delta)\ ^{3} \tag{4.9}$$

unterliegen (die Einschränkung ist Voraussetzung für die Herleitung eines einfachen Robustheitskriteriums), läßt sich durch faktorisierte Fehler ein größeres Spektrum von Modellfehlern erfassen. Die Einschränkung (4.9) entfällt, weil Δ_N und Δ_M bereits nach Definition 2 stabil sind.

[3] $\eta\,(\circ)$ bezeichnet die Anzahl grenz- oder instabiler Pole einer Übertragungsfunktion.

d) Regelungstechnische Ziele

Mögliche regelungstechnische Zielsetzungen sollen anhand des Standardregelkreises in Abbildung 4.1 diskutiert werden. Da zahlreiche Arbeiten [27, 29, 1, 19, 32] die quantitative Formulierung regelungstechnischer Ziele umfassend behandeln, werden im folgenden mathematische Ansätze nur exemplarisch vorgestellt. Eine systematische Darstellung findet man z. B. in [29].

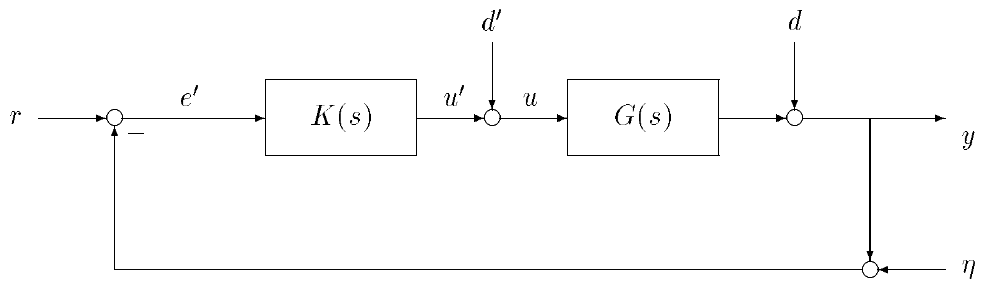


Abbildung 4.1: Standardregelkreis

$G \in \mathcal{R}^{p \times q}$, $p \leq q$ sei das Streckenmodell und $K \in \mathcal{RH}_\infty^{q \times p}$ der gesuchte Regler. Das Ausgangsignal y wird mit der Stellvariablen u' geregelt. Die Führungsgröße wird mit r bezeichnet. Am Ein- bzw. Ausgang der Strecke wirken die Störungen d' und d. In der Rückführung verzerrt Meßrauschen η das Ausgangssignal.

□ Nominelle Stabilität ist gewährleistet, wenn in keinem Übertragungsweg des Regelkreises Signale unbegrenzter Amplitude auftreten. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist:

$$\begin{bmatrix} (I_p + GK)^{-1} GK & (I_p + GK)^{-1} G \\ K (I_p + GK)^{-1} & -K (I_p + GK)^{-1} G \end{bmatrix} \in \mathcal{RH}_\infty \,. \tag{4.10}$$

□ Der größte singuläre Wert der Sensitivitätsmatrix $S = (I_p + GK)^{-1}$ ist ein Maß für die Qualität des Führungs- und Störverhaltens. Um in einem vorgegebenen Frequenzbereich Ω_{rd} gutes Führungs- und Störverhalten zu erreichen, muß gelten:

$$\bar{\sigma}\left[S(j\omega)\right] \ll 1, \qquad \omega \in \Omega_{rd} \,. \tag{4.11}$$

Die Beschränkung auf Regelstrecken mit höchstens soviel Ausgangsvariablen wie Eingangsgrößen soll nachstehend mathematisch begründet werden. Für den Fall $p > q$ ist die Übertragungsmatrix des offenen Kreises $Q = GK$ für alle Frequenzen singulär, es gilt:

$$\underline{\sigma}\left[Q\left(j\omega\right)\right] = 0 \qquad \forall\, \omega \,. \tag{4.12}$$

Deshalb ergibt sich für alle Frequenzen:

$$\begin{aligned}
\underline{\sigma}\left[I_p + Q\right] &= \min_{v \neq 0} \frac{\|(I_p + Q)\, v\|}{\|v\|} && (4.13)\\
&\leq \min_{v \neq 0} \frac{\|v\| + \|Qv\|}{\|v\|} && (4.14)\\
&= 1 + \underline{\sigma}\left[Q\right] && (4.15)\\
&= 1\,. && (4.16)
\end{aligned}$$

Aus der Abschätzung folgt:

$$\bar{\sigma}\left[S\right] = \frac{1}{\underline{\sigma}\left[I_p + Q\right]} \geq 1\,, \tag{4.17}$$

d. h., die Bedingung für gutes Führungs- und Störverhalten kann nicht erfüllt werden. Die H_∞-Theorie ist nicht ohne Modifikationen auf Problemstellungen mit mehr Regelgrößen als Stellvariablen anwendbar[4].

□ Der größte singuläre Wert der komplementären Sensitivitätsmatrix $T = I_p - S$ ist ein Maß für die Unterdrückung des Meßrauschens und die Robustheit der Eigenschaft Stabilität bzgl. multiplikativen Modellfehlern.

□ Der größte singuläre Wert der Matrix KS ist ein Maß für die Robustheit der Stabilität gegenüber additiven Modellfehlern. Darüber hinaus können aus den singulären Werten der Matrix KS Aussagen über die Stellgliedaktivitäten abgeleitet werden.

Bedingungen, die garantieren, daß die Eigenschaften des nominellen Regelkreises für den realen Regelkreis erhalten bleiben, schränken jedoch die Verläufe der singulären Werte ein. Als Beispiel für eine ganze Reihe von Kriterien wird das Robustheitskriterium für Stabilität bei faktorisierten Modellfehlern angegeben. Für die Robustheitskriterien quantitativer Anforderungen sei auf [29] verwiesen.

Theorem 1 *Der Standardregelkreis in Abbildung 4.1 ist für alle Regelstrecken* $G_\Delta = (M + \Delta_M)^{-1}(N + \Delta_N)$, $[\,\Delta_M \quad \Delta_N\,] \in \mathcal{D}_{MN}$ *asymptotisch stabil, wenn gilt:*

1. *der nominelle Regelkreis ist asymptotisch stabil,*

2. $$\bar{\sigma}\begin{bmatrix} K(j\omega)S(j\omega)M^{-1}(j\omega) \\ S(j\omega)M^{-1}(j\omega) \end{bmatrix} \leq \frac{1}{l_{MN}(\omega)} \qquad \forall\, \omega\,. \tag{4.18}$$

[4] Da für die Regelung des Zweimassenmodells nur eine Eingriffsmöglichkeit zur Verfügung steht ($q = 1$), wird in Abschnitt 5 der Relativweg als Regelgröße gewählt.

e) Spezielle Transformationen von Übertragungsmatrizen

Mit Hilfe der Transformation (*Upper Linear Fractional Transformation*)

$$\mathcal{F}_U\left(P, \Delta\right) = P_{22} + P_{21}\Delta\left(I - P_{11}\Delta\right)^{-1} P_{21} \tag{4.19}$$

lassen sich Systeme mit unstrukturierten Modellfehlern in ein allgemeines Schema einordnen. Das zugehörige Signalflußdiagramm ist im linken Teil der Abbildung 4.2 gezeigt. Mit Gleichung (4.19) kann für reale Übertragungssysteme geschrieben werden:

$$G_\Delta = \mathcal{F}_U\left(P, \Delta\right) . \tag{4.20}$$

Für den Spezialfall $\Delta = 0$ ergibt sich das nominelle Modell:

$$G = \mathcal{F}_U\left(P, 0\right) . \tag{4.21}$$

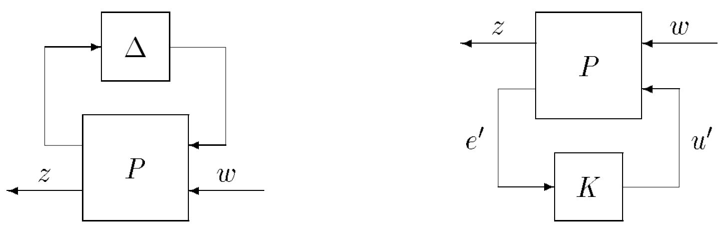


Abbildung 4.2: *Upper* bzw. *Lower Linear Fractional Transformation*

Ein Schema, das eine Vielzahl von speziellen H_∞-Aufgabenstellungen standardisiert, ist der verallgemeinerte Regelkreis (*Standard Compensator Configuration*). Der rechte Teil der Abbildung 4.2 zeigt das Signalflußdiagramm der Systemanordnung.

$P(s)$ heißt verallgemeinerte Regelstrecke; w und z bezeichnen die externen Ein- bzw. Ausgangsgrößen der Regelkreises. Der Reglerausgang u' und die dem Regler zur Verfügung stehende Meßinformation e' sind regelkreisinterne Ein- bzw. Ausgangsgrößen. Der Zusammenhang zwischen internen und externen Größen ist gegeben durch:

$$\begin{bmatrix} z \\ e' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u' \end{bmatrix} . \tag{4.22}$$

Die Transformation (*Lower Linear Fractional Transformation*)

$$\mathcal{F}_L\left(P, K\right) = P_{11} + P_{12}K\left(I - P_{22}K\right)^{-1} P_{21} \tag{4.23}$$

beschreibt das Übertragungsverhalten des geschlossenen verallgemeinerten Regelkreises von w nach z:

$$z = \mathcal{F}_L\left(P, K\right) w . \tag{4.24}$$

4.2 H_∞-Standard-Problem

In vielen Fällen steht die robuste Stabilisierung des realen Systems im Vordergrund regelungstechnischer Überlegungen. Hervorragende nominelle Regelkreiseigenschaften bleiben ohne Nutzen, wenn sie am realen Prozeß nicht umgesetzt werden können. Die H_∞-Theorie bietet leistungsfähige Ansätze, um dieses Problem zu behandeln.

Das H_∞-Entwurfsverfahren bewertet verschiedene Übertragungsfunktionen innerhalb des Regelkreises über der Frequenz und faßt diese in einer standardisierten Systemanordnung zusammen. Die H_∞-Norm der zugehörigen Übertragungsmatrix wird als Kostenfunktional bezeichnet. Die Minimierung des Kostenfunktionals führt auf den optimalen H_∞-Regler.

Um das Regelungsproblem elegant formulieren zu können, werden die in Abschnitt 4.1 c) eingeführten Fehlerklassen $\mathcal{D}_A$, $\mathcal{D}_P$ und $\mathcal{D}_{MN}$ in einer abstrakteren Notation zusammengefaßt. Mit Definition 1 und der Transformation $\mathcal{F}_U$ aus Abschnitt 4.1 e) kann für die allgemeinere Fehlerklasse $\mathcal{D}_\varepsilon$ geschrieben werden:

$$\mathcal{D}_\varepsilon = \mathcal{D}_{\mathcal{S}\,\varepsilon} \cup \mathcal{D}_{\mathcal{U}\,\varepsilon}\,, \tag{4.25}$$

wobei für $\mathcal{D}_{\mathcal{S}\,\varepsilon}$ und $\mathcal{D}_{\mathcal{U}\,\varepsilon}$ gilt:

$$\mathcal{D}_{\mathcal{S}\,\varepsilon} = \left\{\Delta \;\middle|\; \Delta \in \mathcal{RH}_\infty,\ \|\Delta\|_\infty < \varepsilon\right\} \tag{4.26}$$

$$\mathcal{D}_{\mathcal{U}\,\varepsilon} = \left\{\Delta \;\middle|\; \Delta \in \mathcal{RL}_\infty,\ \eta\left(\mathcal{F}_U\left(P,0\right)\right) = \eta\left(\mathcal{F}_U\left(P,\Delta\right)\right),\ \|\Delta\|_\infty < \varepsilon\right\}\,. \tag{4.27}$$

$\mathcal{D}_{\mathcal{S}\,\varepsilon}$ bezeichnet die Klasse aller stabilen Modellfehler. Durch $\mathcal{D}_{\mathcal{U}\,\varepsilon}$ sind auch instabile Fehler zugelassen, jedoch gilt Einschränkung (4.9). Als Problem der robusten Stabilisierung wird definiert:

Satz 1 (Problem der robusten Stabilisierung)
Die größte positive Zahl $\varepsilon = \varepsilon_{\max}$, so daß genau ein Regler K alle $\mathcal{F}_U(P,\Delta)$, $\Delta \in \mathcal{D}_\varepsilon$ robust stabilisiert, ist gegeben durch

$$\varepsilon_{\max}^{-1} = \inf_{\text{stabilis.}\,K} \|\mathcal{F}_L(P,K)\|_\infty\,. \tag{4.28}$$

$\varepsilon_{\max}$ heißt maximale Stabilitätsreserve. K ist aus der Menge aller $\mathcal{F}_U(P,0)$ stabilisierenden Regler-Übertragungsmatrizen.

Das Problem der robusten Stabilisierung fügt sich nahtlos in das allgemeinere H_∞-Standard-Problem ein. Das H_∞-Standard-Problem ist formal definiert durch die Aufgabe:

Problem 1 **(H_∞-Standard-Problem)**
Berechne K, so daß

$$\inf_{\text{stabilis.} K} \|\mathcal{F}_L(P, K)\|_\infty = \gamma_{\min} . \tag{4.29}$$

K ist aus der Menge aller $\mathcal{F}_U(P, 0)$ stabilisierenden Regler-Übertragungsmatrizen.

In den Abschnitten 4.3 und 4.4 werden als Beispiele für H_∞-Aufgabenstellungen das S/KS/T Problem und der NLKF Entwurf vorgestellt.

4.3 S/KS/T Problem

Das S/KS/T Problem wird auch *Mixed Sensitivity* Problem genannt. Wie der Name sagt, werden die in Abschnitt 4.1 d) eingeführten Übertragungsmatrizen S, KS und T des geschlossenen Kreises frequenzabhängig gewichtet (*closed loop shaping*). Darüber hinaus können mit Hilfe der Eingangsgewichtung W_i die auf den Regelkreis wirkenden exogenen Störgrößen bewertet werden. Das Problem ist vollständig festgelegt durch

$$\inf_{\text{stabilis.} K} \left\| \begin{bmatrix} W_S & 0 & 0 \\ 0 & W_{KS} & 0 \\ 0 & 0 & W_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S \\ KS \\ T \end{bmatrix} W_i \right\|_\infty . \tag{4.30}$$

Die Wahl der Gewichte W_S, W_{KS} und W_T ist problemspezifisch. Sie spiegeln die Vorgaben im einzelnen Anwendungsfall wieder. Eine Anleitung zur konkreten Vorgehensweise kann deshalb nicht gegeben werden. Allgemeine Richtlinien, u. a. Bedingungen für eine korrekte Problemformulierung, findet man in [27, 26].

Das S/KS/T Problem kann als Spezialfall aus dem H_∞-Standard-Problem abgeleitet werden. Für das dem S/KS/T Problem zugeordnete verallgemeinerte Streckenmodell P ergibt sich

$$P = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -W_S W_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -W_S G \\ W_{KS} \\ W_T G \end{bmatrix} \\ -W_i & -G \end{bmatrix} . \tag{4.31}$$

4.4 NLKF Problem

Das Problem der robusten Stabilisierung motiviert den NLKF Entwurf. Die Problemformulierung basiert auf einer normalisierten linkskoprimen Faktorisierung des Streckenmodells. Aus der Bedingung für robuste Stabilität (4.18) kann durch Anwendung der Definition 1 das H_∞-Kriterium des NLKF Entwurfs hergeleitet werden:

$$\inf_{\text{stabilis.}\,K} \left\| \begin{bmatrix} I_p \\ K \end{bmatrix} (I_p + GK)^{-1} M^{-1} \right\|_\infty . \tag{4.32}$$

Das NLKF Problem läßt sich ebenfalls in das H_∞-Standard-Problem einordnen. Für die zugehörige verallgemeinerte Regelstrecke P erhält man:

$$P = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -M^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -G \\ I_p \end{bmatrix} \\ -M^{-1} & -G \end{bmatrix} . \tag{4.33}$$

Im Fall des S/KS/T Problems ergeben sich aufgrund von Pol-Nullstellenkürzungen u. U. für die nicht im H_∞-Kriterium berücksichtigten Übertragungsfunktionen völlig unbefriedigende Ergebnisse. Im Gegensatz dazu wird durch die implizite Gewichtung M^{-1} in (4.33) ein Ausgleich zwischen den quantitativen Anforderungen und den Robustheitseigenschaften des Regelkreises erreicht, der mit der Charakteristik der Regelstrecke vereinbar ist. Außerdem kann Modellunsicherheit bzgl. der Anzahl instabiler Streckenpole in den Entwurf einbezogen werden (vgl. Abschnitt 4.1 c)).

Der NLKF Entwurf verläuft in zwei Stufen: Zuerst werden die quantitativen Anforderungen spezifiziert, indem die singulären Werte des gewichteten Streckenmodells

$$G_w = W_a G W_e \tag{4.34}$$

einem für die singulären Werte des offenen Kreises Q angestrebten Verlauf angenähert werden (*open loop shaping*). Die Umsetzung der Forderungen aus Abschnitt 4.1 d), die analog für die singulären Werte des offenen Kreises formuliert werden können, erfolgt durch eine geeignete Wahl der Gewichte W_e und W_a.

In den Literaturstellen des Abschnitts 4.3 werden gleichfalls Hinweise für ein heuristisches Vorgehen bei der Wahl der Ein- bzw. Ausgangsgewichte W_e und W_a gegeben. Überdies sei auf [12, 23] verwiesen.

Der zweite Schritt verbindet die Eigenschaften des gewichteten Streckenmodells mit einem Maximum an robuster Stabilität für den geschlossenen Regelkreis (vgl. Problem der robusten Stabilisierung):

$$\inf_{\text{stabilis.}\,K_w} \left\| \begin{bmatrix} I_p \\ K_w \end{bmatrix} (I_p + G_w K_w)^{-1} M_w^{-1} \right\|_\infty = \varepsilon_{w\,\max}^{-1} . \tag{4.35}$$

Durch Rücktransformation auf das ursprüngliche Regelungsproblem ergibt sich der gesuchte Regler:

$$K = W_e K_w W_a \,. \tag{4.36}$$

4.5 Lösung des H$_\infty$-Standard-Problems

Es existiert eine ganze Reihe von Vorschlägen für die Lösung des H$_\infty$-Standard-Problems ([8, 11, 5, 24, 30, 6]). Viele Aufsätze diskutieren das H$_\infty$-Standard-Problem nicht in seiner allgemeinsten Form, sondern untersuchen nur sehr spezielle Problemstellungen.

[15] behandelt z. B. das sogenannte 1-Block-Problem mit Nullstellen auf der imaginären Achse oder im Unendlichen, während andere Arbeiten zwar das allgemeine 4-Block-Problem betrachten, diesen Fall aber ausschließen, um einen Lösungsweg überhaupt angeben zu können[5]. Für zahlreiche spezielle H$_\infty$-Aufgaben existiert bereits eine breite theoretische Grundlage, eine geschlossene H$_\infty$-Theorie ist jedoch erst in der Entwicklung begriffen.

In dieser Arbeit wird der Algorithmus von Green [14, 13, 27] verwendet. Der Entwurfsmethode basiert auf der J_γ-verlustfreien koprimen Faktorisierung einer Übertragungsmatrix.

Definition 4 *Eine Übertragungsmatrix $G \in \mathcal{RH}_\infty^{(l+p)\times(q+p)}$, $l \geq q$ heißt J_γ-verlustfrei, wenn gilt:*

$$G^T(-s) J_{\gamma\, lp} G(s) - J_{\gamma\, qp} = 0 \qquad \forall\, s \tag{4.37}$$

und $G^\star(s) J_{\gamma\, lp} G(s) - J_{\gamma\, qp}$ für alle s, $\mathrm{Re}(s) \geq 0$ negativ semidefinit ist [6].

Eine ausführliche Beschreibung des Algorithmus findet man in [27]. Soweit für die Spezifikation des Algorithmus erforderlich, wird der Algorithmus auch in Abschnitt A.2 dargestellt. Die J_γ-verlustfreie Faktorisierung wird in Abschnitt A.3 d) erklärt.

[5] Abgesehen von der Schwierigkeit, nichtminimalphasige Systeme regelungstechnisch zu beherrschen, waren die algorithmischen Probleme, die mit Nullstellen auf der imaginären Achse verbunden sind, ausschlaggebend dafür, bei der Herleitung des Zweimassenmodells Dämpfung am Rad anzunehmen. Aus diesem Grund liegen die Übertragungsnullstellen des Systems in der offenen linken Halbebene (vgl. Fußnote 7 in Abschnitt 5).

[6] Die Matrix $J_{\gamma\, lp}$ ist definiert durch

$$J_{\gamma\, lp} = \begin{bmatrix} I_l & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I_p \end{bmatrix}, \ \gamma \in \mathrm{R}^+ \,. \tag{4.38}$$

5 Reglerentwurf

Der Entwurf einer H_∞-Regelung für das EWHP Modell mußte aufgrund numerischer Schwierigkeiten aufgegeben werden. Die erforderlichen Berechnungen konnten für keinen der verwendeten Algorithmen [5], [27] erfolgreich durchgeführt werden. Die Algorithmen scheitern an der unzureichenden Robustheit des Modells, wie nach [19] anhand der Konditionszahl gezeigt werden kann.

Die schlechte Konditionierung des Modells liegt in der Physik der einfach wirkenden Hydropneumatik begründet. Durch die Wechselwirkung von Mechanik und Hydraulik treten im System sehr große Kräfte in Verbindung mit nur sehr kleinen Wegänderungen auf. Ansätze zur Regelung eines schlecht konditionierten Streckenmodells, wie z. B. [9] und [10], würden den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Stattdessen wird im folgenden das Zweimassenmodell behandelt.

Engler wählt in [7] für die Regelung des Zweimassenmodells den Riccati-Entwurf. Das in [7] verwendete Gütekriterium bewertet die Aufbaubeschleunigung im Verhältnis zur dynamischen Radlastschwankung. Zielsetzung war, einen möglichst guten Ausgleich zwischen Komfort und Fahrsicherheit zu finden. Gegenüber passiven Systemen konnten jedoch keine deutlichen Verbesserungen erreicht werden.

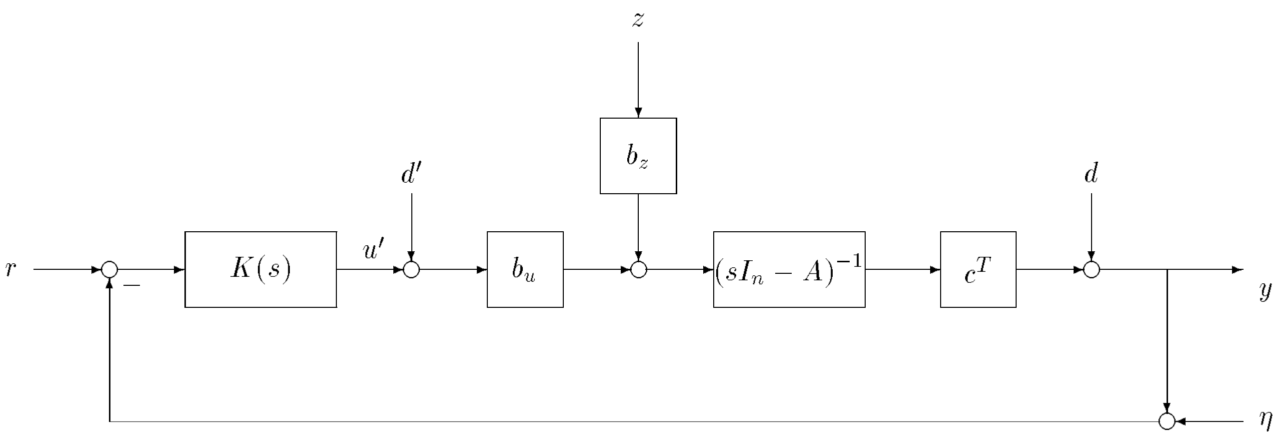


Abbildung 5.1: Regelkreis für das Zweimassenmodell

In dieser Arbeit wird das Regelungsproblem abstrakter formuliert: Das Modell ist robust gegenüber faktorisierten Modellfehlern zu stabilisieren. Ein stabilisierender Regler wird über die Minimierung der Kostenfunktion (4.32) berechnet (NLKF Entwurf). Für die Regelgüte sei entscheidend, inwieweit der Regler von der Fahrbahn herrührende Störungen z kompensieren kann. Als Meßgröße stehe der Regelung lediglich der Relativweg zwischen Aufbau und Rad zur Verfügung ($c^T = [\,1 \quad 0 \quad -1 \quad 0\,]$). Die Stellgröße u sei eine zwischen Aufbau und Rad angreifende Kraft. Das Regelungsproblem ist in Abbildung 5.1 als Blockschaltbild dargestellt.

Für einen S/KS/T Entwurf wäre es naheliegend, die Störübertragungsfunktion $G_z(s) = c^T (sI_n - A)^{-1} b_z$ als Eingangsgewicht zu wählen. Beim NLKF Entwurf muß die Stördynamik implizit in den Anforderungen an den offenen Kreis berücksichtigt werden. Aufgrund der in Abschnitt 3 eingeführten Raddämpfung liegen die invarianten Nullstellen des Systems $(A, b_u, c^T, 0)$ nicht auf der imaginären Achse, wie im ungedämpften Fall, sondern bei

$$-0.74 \pm 27.26\,i \ .$$

Die Annahme, daß die Radbewegung gedämpft ist, ist sicherlich realistisch. Für das nominelle Modell der Regelstrecke keine Dämpfung anzunehmen, würde die Erreichbarkeit regelungstechnischer Forderungen unnötig einschränken[7].

Nachstehend werden zwei verschiedene H_∞-Regler für das Zweimassenmodell diskutiert. Mit dem ersten Entwurf wurde ein schnelles Ausregeln von Störungen erreicht. Der zweite Regler ist auf die Beruhigung der Aufbaubewegung ausgelegt. Beide Regler wurden mit der *Loop Shaping Design Procedure* aus [23] entworfen.

5.1 Entwurf Nr. 1

Die Durchtrittsfrequenz des nominellen Modells liegt ungefähr bei $0.1/s$ (s. Abbildung 5.2). Die Einschwingzeit des Systems liegt im Sekundenbereich. Um ein schnelles Einschwingen des geschlossenen Regelkreises zu erreichen, muß die Kreisverstärkung beträchtlich erhöht werden. Zusätzlich wird eine verschwindende bleibende Regelabweichung gefordert; es muß gelten:

$$G_w(j\omega) \to \infty \quad \text{für} \quad \omega \to 0\,. \tag{5.2}$$

Bei Eingrößensystemen können die Gewichtsfunktionen $W_a(s)$ und $W_e(s)$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit zu einer Gewichtsfunktion $W(s)$ zusammengefaßt werden. *Open loop shaping* mit

$$W_1 = 1e5 \tag{5.3}$$

führt zu der erforderlichen Erhöhung der Bandbreite. Damit ergibt sich als angestrebter Amplitudenverlauf des offenen Kreises (s. Abbildung 5.2):

$$|G_w(j\omega)| = |W_1 G(j\omega)| \ . \tag{5.4}$$

[7] Besitzt die Übertragungsfunktion des offenen Kreises eine Nullstelle z in der rechten Halbebene, existieren stets reelle Zahlen c_1 und c_2 bei gegebenen Frequenzen ω_1, ω_2, so daß gilt:

$$c_1 \log M_1 + c_2 \log M_2 \geq \log \left| S_i^{-1}(z) \right| \tag{5.1}$$

mit $M_1 = \max\limits_{[\omega_1, \omega_2)} |S|$ und $M_2 = \sup\limits_{\omega} |S|$. S_i ist der Allpaßanteil der Sensitivitätsfunktion. Das Aufwölben der Sensitivität wird in der Literatur als „Wasserbett-Effekt“ bezeichnet [27].

Ein Regler $K_{w\,1}$, der die linkskoprime Faktorisierung $G_w = M_w^{-1} N_w$ robust stabilisiert, wurde mit dem Programm myhinf berechnet (s. Abschnitt A). Die zugehörige Stabilitätsreserve hat den Wert

$$\varepsilon_{w\,1} = 0.4264 \quad (\gamma_1 = 2.35)\,. \tag{5.5}$$

ε_w kann als Indikator für den Erfolg des Entwurfs interpretiert werden. Im Bereich der Durchtrittsfrequenz können bis zu 40% Modellunsicherheit toleriert werden. Bei hohen bzw. niedrigen Frequenzen weicht der erreichte Amplitudenverlauf maximal um den Faktor $\left(\gamma^2 - 1\right)^{1/2} = 2.12$ von der Vorgabe ab (s. Abbildung 5.2).

Der Regler für das ursprüngliche Problem ergibt sich durch die Rücktransformation:

$$K_1(s) = K_{w\,1}(s) W_1\,. \tag{5.6}$$

Die aus der Stabilisierung resultierende Verzerrung des Amplitudengangs ist minimal, der Phasenverlauf weist hingegen starke Korrekturen auf. Auffällig sind die Abweichungen im Bereich der Nullstellen bzw. im Bereich der Radeigenfrequenz.

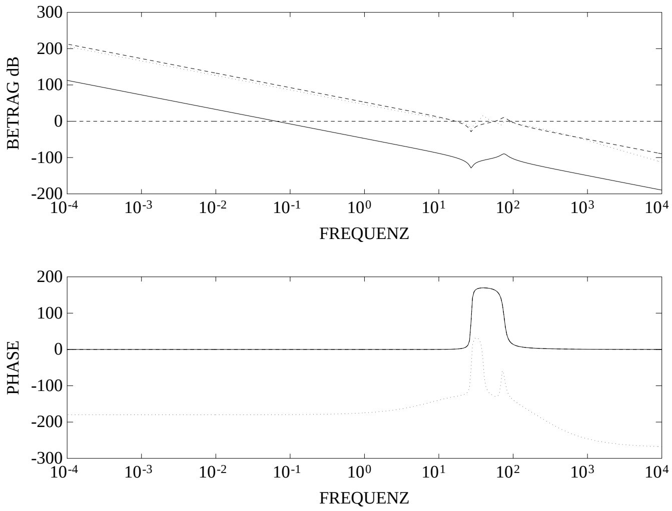


Abbildung 5.2: *Open loop shaping*: $\bar{\sigma}\left[G(j\omega)\right]$ (durchgezogen), $\bar{\sigma}\left[G_w(j\omega)\right]$ (unterbrochen) und $\bar{\sigma}\left[Q(j\omega)\right]$ (punktiert), Entwurf Nr. 1

5.2 Entwurf Nr. 2

Ein zweiter Entwurf wurde durchgeführt, um die Störunterdrückung des Regelkreises zu verbessern. Für eine Beruhigung der Aufbaubewegung wird verlangt, daß Störungen ohne Überschwingen ausgeregelt werden. Durch die Gewichtsfunktion

$$W_2(s) = \frac{5e3s}{s+10} \tag{5.7}$$

werden insgesamt niedrigere Kreisverstärkungen als beim ersten Entwurf realisiert. Außerdem wird mit $W_2(s)$ in der Nähe der Durchtrittsfrequenz ein Amplitudenabfall von 20 dB/Dekade vorgegeben (s. Abbildung 5.3).

Die Robustheit der Stabilität konnte im Bereich mittlerer Frequenzen deutlich verbessert werden. Für die Stabilitätsreserve des geschlossenen Kreises gilt:

$$\varepsilon_{w\,2} = 0.5528 \quad (\gamma_2 = 1.81)\,. \tag{5.8}$$

Aus $K_{w\,2}(s)$ ergibt sich der gesuchte Regler durch Multiplikation mit $W_2(s)$ gemäß der Gleichung:

$$K_2(s) = K_{w\,2}(s)W_2(s)\,. \tag{5.9}$$

Der Regler $K_2(s)$ ist 5. Ordnung. Das Bodediagramm des offenen Kreises $Q(j\omega)$ als Ergebnis des Entwurfs ist in Abbildung 5.3 gezeigt.

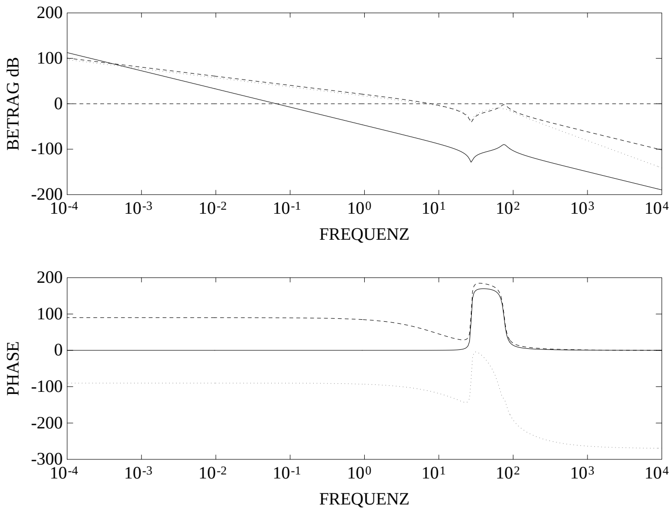


Abbildung 5.3: *Open loop shaping*: $\bar{\sigma}\,[G(j\omega)]$ (durchgezogen), $\bar{\sigma}\,[G_w(j\omega)]$ (unterbrochen) und $\bar{\sigma}\,[Q(j\omega)]$ (punktiert), Entwurf Nr. 2

5.3 Bewertung der Ergebnisse

Beide Regler weisen gutes Führungs- und Störverhalten auf, wie der Verlauf der Sensitivität in Abbildung 5.4 zeigt. Die deutlich stärkere Dämpfung des Reglers K_1 bei niedrigen Frequenzen ist auf die hohe Kreisverstärkung zurückzuführen.

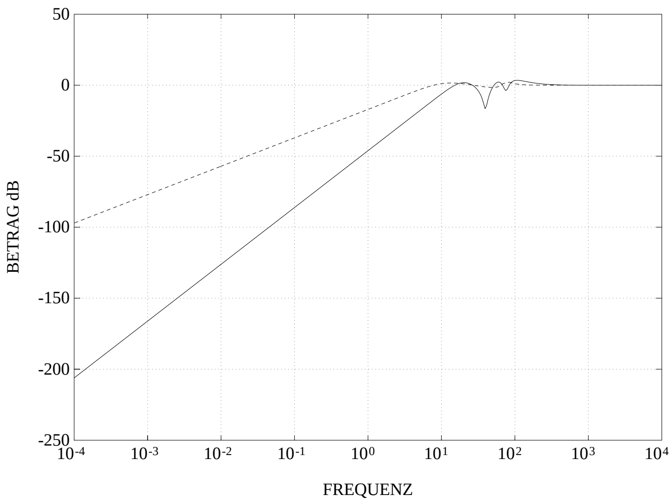


Abbildung 5.4: Verlauf der Sensitivität $\bar{\sigma}\left[S(j\omega)\right]$

Sofern in den Bildunterschriften nicht anders kommentiert, beziehen sich die durchgezogenen Linien in den Diagrammen auf den ersten Entwurf, Ergebnisse des zweiten Entwurfs sind durch unterbrochene Linien dargestellt.

Gegenüber Eingangsstörungen ist der geschlossene Kreis jedoch anfällig, was im Hinblick auf eine Implementierung des Reglers am realen Prozeß als kritisch angesehen werden muß. Abbildung 5.5 stellt diese Problematik im Frequenzbereich dar.

In beiden Fällen konnte keine asymptotische Stabilität erreicht werden. Während das durch K_2 geregelte System bzgl. Eingangsstörungen instabil ist, kann der Regler K_1 aufgrund eines zusätzlichen Integralanteils Störungen bis auf einen kleinen bleibenden Regelfehler kompensieren (vgl. Abbildungen 5.2 und 5.3).

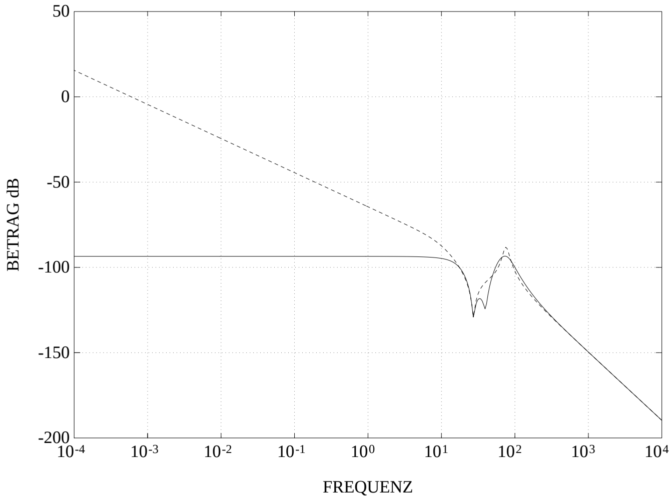


Abbildung 5.5: Empfindlichkeit bzgl. Eingangsstörungen $\bar{\sigma}\left[S(j\omega)G(j\omega)\right]$

Abbildung 5.6 zeigt, wie das System auf eine sprungförmige Änderung der Kraft u reagiert. Für einen Kraftsprung von $\widehat{d'} = 20\,N$ beträgt die bleibende Regelabweichung des Aufbauniveaus ca. 4 Zehntelmillimeter. Das zugehörige Stellsignal u' ist in Abbildung 5.7 dargestellt. Nach dem Einschwingvorgang hält der Regler das System durch eine gleich große entgegengerichtete Kraft im Gleichgewicht.

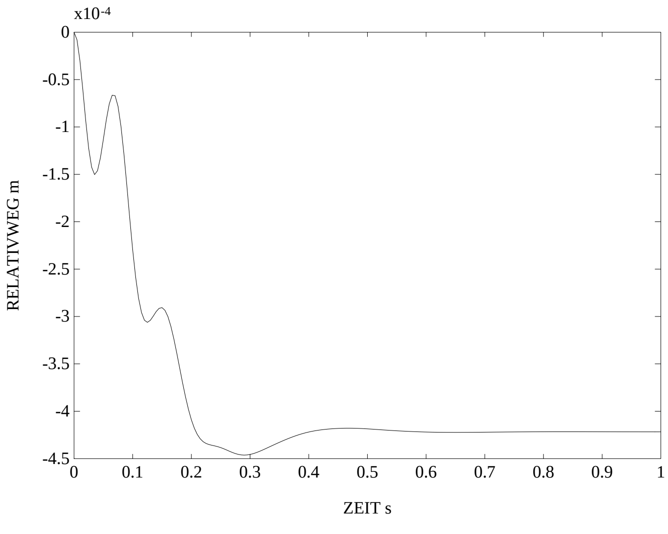


Abbildung 5.6: Zeitverhalten für eine sprungförmige Eingangsstörung ($\widehat{d'} = 20\,N$): Streckenausgang y, Entwurf Nr. 1

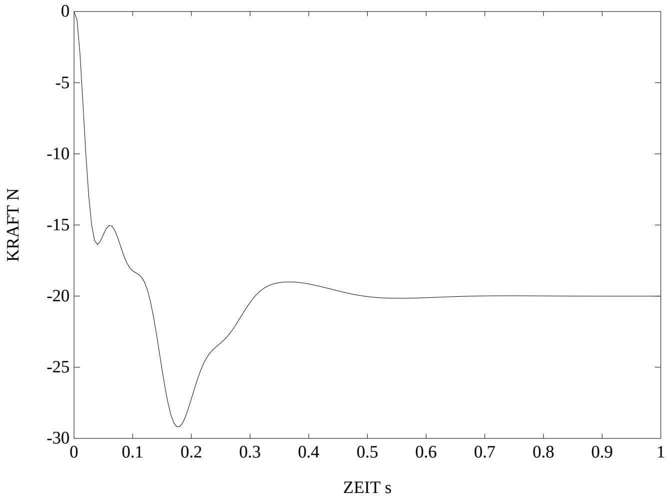


Abbildung 5.7: Zeitverhalten für eine sprungförmige Eingangsstörung ($\widehat{d'} = 20\,N$): Reglerausgang u', Entwurf Nr. 1

Die Abbildungen 5.8 und 5.9 zeigen die Verläufe der singulären Werte $1/\bar{\sigma}\,[K(j\omega)S(j\omega)]$ und $1/\bar{\sigma}\,[T(j\omega)]$ als Maß für robuste Stabilität gegenüber additiven bzw. multiplikativen Modellfehlern. Für eine Bewertung der Robustheit bzgl. faktorisierter Fehler wurde in den Abschnitten 5.1 und 5.2 bereits ε_w als Indikator betrachtet.

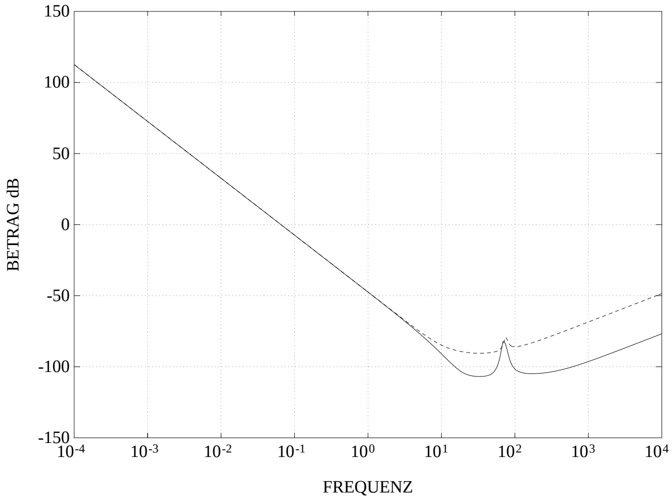


Abbildung 5.8: Robustheit bzgl. additiver Modellfehler $1/\bar{\sigma}\,[K(j\omega)S(j\omega)]$

Beide Entwürfe stimmen für niedrige Frequenzen in ihren Robustheitseigenschaften praktisch überein. Im Bereich mittlerer und hoher Frequenzen konnte durch den zweiten Entwurf die Robustheit der Stabilität sichtlich verbessert werden. Die maximal zulässigen Modellfehler sind rund um den Faktor 5 größer.

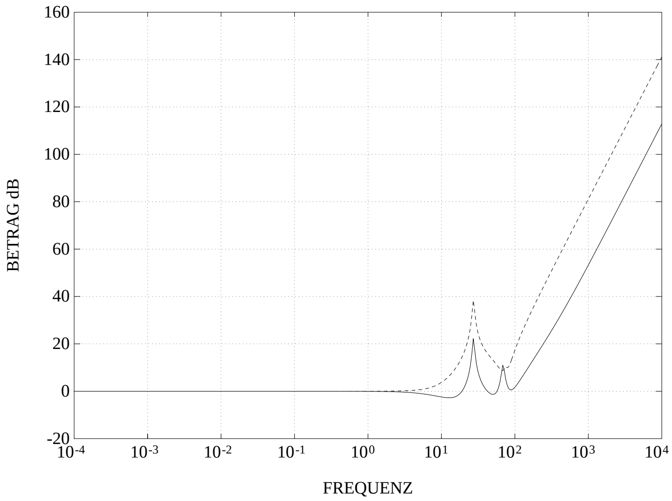


Abbildung 5.9: Robustheit bzgl. multiplikativer Modellfehler $1/\bar{\sigma}\,[T(j\omega)]$

Bei der Gesamtbeurteilung der Regler für den Einsatz in der Praxis ist das Verhalten des Systems auf der Fahrbahn ausschlaggebend. Das Störübertragungsverhalten des geschlossenen Kreises von Fahrbahnunebenheiten z auf den Streckenausgang y ist in Abbildung 5.10 über der Frequenz dargestellt.

Das Übertragungsverhalten ist für niedrige Frequenzen durch den Verlauf der Sensitivität bestimmt. Bei mittleren und hohen Frequenzen ist der Amplitudengang der Störübertragungsfunktion vorherrschend (s. Überhöhung im Bereich der Radeigenfrequenz). Oberhalb von $100/s$ wirkt die Störübertragungsfunktion als Tiefpaß. Durch beide Regler ist gewährleistet, daß die Regelabweichung stationär Null wird. Im Zeitbereich werden die Unterschiede deutlicher.

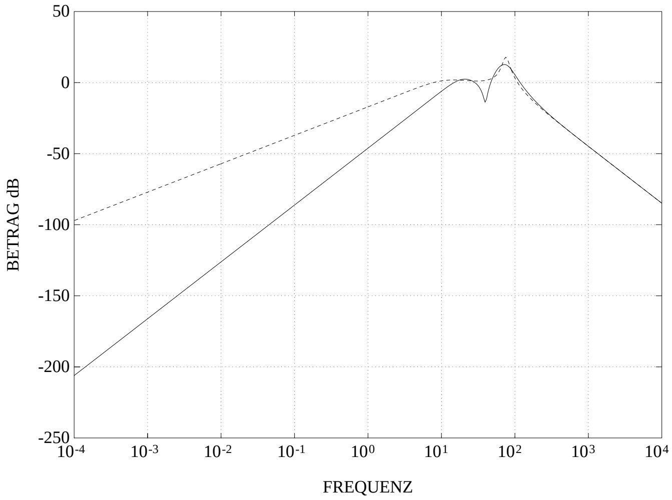


Abbildung 5.10: Empfindlichkeit bzgl. Fahrbahnunebenheiten $\bar{\sigma}\left[S(j\omega)G_z(j\omega)\right]$

Die Ergebnisse der Fahrbahnsimulationen sind in den folgenden Abbildungen dokumentiert: Abbildung 5.11 zeigt die Sprungantwort des Systems auf einen plötzlichen Anstieg der Fahrbahn um $0.02\,m$. Das zugehörige Ausgangssignal der Reglers K_1 ist in Abbildung 5.12 zu sehen. In den Abbildungen 5.13 und 5.14 sind die entsprechenden Verläufe für den zweiten Entwurf dargestellt.

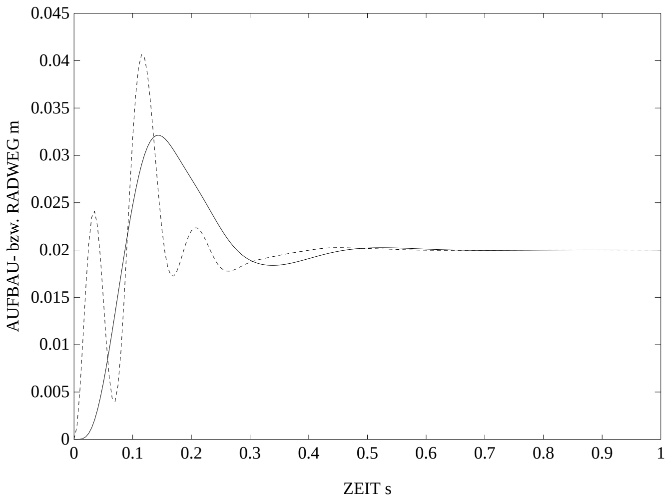


Abbildung 5.11: Zeitverhalten für eine sprungförmige Fahrbahnunebenheit ($\hat{z} = 0.02\,m$): Aufbauweg x_A (durchgezogen), Radweg x_R (unterbrochen), Entwurf Nr. 1

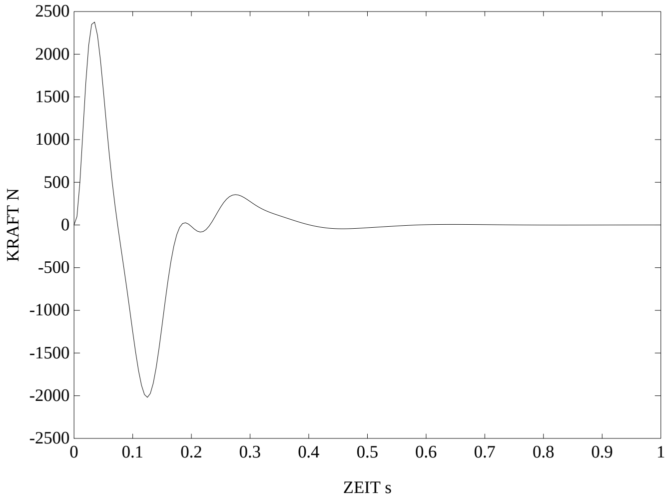


Abbildung 5.12: Zeitverhalten für eine sprungförmige Fahrbahnunebenheit ($\hat{z} = 0.02\,m$): Reglerausgang u', Entwurf Nr. 1

Der Regelvorgang ist nach ca. 0.5 Sekunden abgeschlossen. Während der starke Stelleingriff des ersten Reglers den Aufbau mit in Schwingung versetzt, kann der Regler K_2 ein Überschwingen des Aufbaus verhindern (vgl. Abbildungen 5.11 und 5.13).

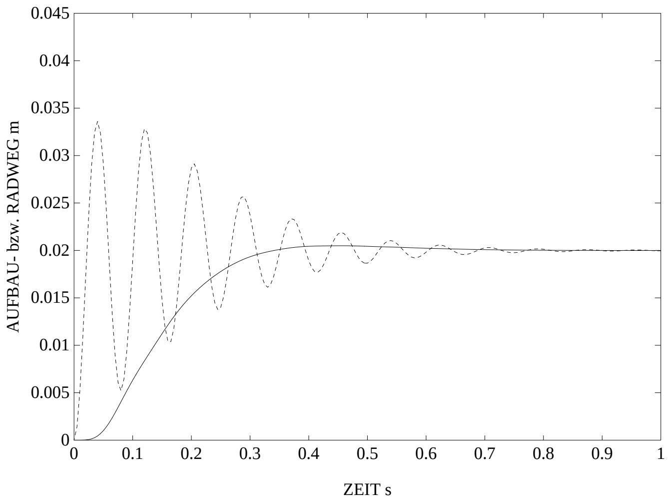


Abbildung 5.13: Zeitverhalten für eine sprungförmige Fahrbahnunebenheit ($\hat{z} = 0.02\,m$): Aufbauweg x_A (durchgezogen), Radweg x_R (unterbrochen), Entwurf Nr. 2

Der maßvollere Einsatz der Stellenergie wirkt sich jedoch nachteilig auf das Einschwingverhalten des Rads aus (s. Abbildung 5.13). Darüber hinaus unterscheiden sich die Regler hinsichtlich des Stellaufwands erheblich. Der Regler K_2 benötigt für die Kompensation der betrachteten Störung wesentlich weniger Energie. Die auftretenden Stellkräfte sind kleiner als $1000\,N$. Im Vergleich zum ersten Entwurf beträgt der Stellaufwand nur 40% (vgl. Abbildungen 5.12 und 5.14).

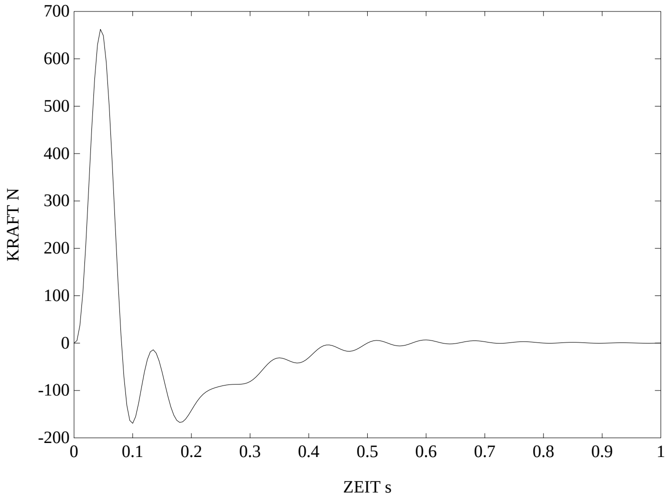


Abbildung 5.14: Zeitverhalten für eine sprungförmige Fahrbahnunebenheit ($\hat{z} = 0.02\,m$): Reglerausgang u', Entwurf Nr. 2

Mit dem Regler $K_2(s)$ kann den für die Praxis relevanten Forderungen besser Rechnung getragen werden. Die H_∞-Regelung ermöglicht ein schnelles Ausregeln der Fahrbahnunebenheiten. Es tritt keine bleibende Regelabweichung auf. Für die Regelung ist der Relativweg als Meßinformation ausreichend. Der Aufwand für die Rekonstruktion des Systemzustands entfällt. Ein Vergleich mit dem Riccati-Entwurf hinsichtlich des Energiebedarfs fällt ebenfalls zugunsten des H_∞-Reglers aus.

Die Bewertung des Reglers im Konfliktschaubild[8] relativiert die Aussagen geringfügig. Obwohl die Minimierung von Aufbaubeschleunigung und Radlastschwankung nicht explizites Entwurfsziel gewesen ist, ergibt sich ein sehr guter Wert für den Fahrkomfort. Jedoch führt die Tatsache, daß das System ohne Zustandsinformation nicht auf seinen Trajektorien in den Beharrungszustand bewegt werden kann, zu Einschränkungen bei der Fahrsicherheit.

[8] In [7] wird das Konfliktschaubild motiviert und ausführlich erklärt.

6 Zusammenfassung und Wertung

Die vorliegende Arbeit behandelt die H_∞-Regelung eines aktiven Pkw-Fahrwerks. Es wird eines der modernsten H_∞-Verfahren (NLKF Entwurf) eingesetzt. Für das Problem der Fahrwerksregelung, das bisher weniger von der regelungstechnischen als von der praktischen Seite angegangen worden ist, werden auf einem regelungstheoretischen Hintergrund neue Zielsetzungen formuliert.

Es wurde ein lineares zeitinvariantes Modell der einfach wirkenden Hydropneumatik hergeleitet. Die Systemanalyse hat gezeigt, daß das Modell die Physik zwar gut beschreibt, jedoch aufgrund unzureichender Robustheit für den Reglerentwurf als ungeeignet angesehen werden muß. Aus diesem Grund wurde die Regelung des Zweimassenmodells betrachtet. Die Ergebnisse sind nur begrenzt auf das EWHP Modell übertragbar.

Es werden robuste Regler für die Fahrwerksregelung vorgeschlagen, welche Nichtlinearitäten des realen Systems und z. B. durch Verschleiß bedingte Parameterveränderungen ebenso tolerieren wie Modellierungsfehler. Im Vergleich dazu gehen zahllose andere Arbeiten von idealisierten Annahmen aus. Andererseits ist die Dynamik der Reglerfunktion nicht transparent, d. h. es gibt keine anschaulich interpretierbaren Reglerparameter, die eine Modifikation des Reglers am Fahrzeug zulassen würden.

In einer Gesamtbeurteilung sind die H_∞-Regler den Zustandsreglern aus [7] überlegen. Die Bedeutung des Konfliktschaubilds ist durch die Ergebnisse in Frage gestellt. Die spezifische Sichtweise läßt keine tragfähigen Aussagen für eine umfassende Beurteilung der verschiedenen Teilaspekte des Regelungsproblems zu. Die Beschränkung auf die Kriterien Aufbaubeschleunigung und Radlastschwankung ist zu einfach. Es konnte ein schnelles asymptotisches Ausregeln der Fahrbahnunebenheiten erreicht werden. Darüber hinaus wurde sowohl der Aufwand für die Sensorik als auch der Energiebebarf erheblich reduziert.

Mit dieser Arbeit ist ein leistungsfähiges Werkzeug entstanden, das verschiedene H_∞-Verfahren einer ganzen Reihe potentieller Anwendungen zugänglich macht. Der Entwurfsvorgang ist weitgehend automatisiert. Eine sinnvolle Problemformulierung bleibt — zumindest in nächster Zukunft noch — Sache des Anwenders. Abschließend sei der Hoffnung Ausdruck verliehen, daß der in dieser Arbeit gewählte theoretische Zugang das Fachwissen auf dem Gebiet der Fahrwerksregelung bereichern kann.

Anhang

A Werkzeug

Die Umsetzung moderner Entwurfsverfahren in die Praxis wird erst durch den Einsatz von Rechnern möglich. Vor allem bei den H_∞-Verfahren ist der numerische Aufwand enorm. Weder die anspruchsvolle mathematische Theorie noch die notwendigen extensiven Umformungen hochdimensionaler Matrizen sind ohne leistungsfähige Rechner beherrschbar. Durch eine entsprechende Software kann der Entwurfsvorgang weitgehend automatisiert werden, so daß die Kreativität des Anwenders nicht mehr bei der Problemlösung, sondern bei der Problemformulierung gefordert ist. Zu diesem Zweck ist mit dieser Arbeit ein Werkzeug entstanden, das im folgenden kurz vorgestellt werden soll[9].

Eine Einführung in das Programmsystem wird in Abschnitt A.1 gegeben. In Abschnitt A.2 ist der Algorithmus dargestellt, soweit es im Rahmen dieser Arbeit sinnvoll und für die Erklärung des Funktionsumfangs notwendig ist. Innerhalb der Programmstruktur wird auf die Lösungswege für das S/KS/T bzw. das NLKF Problem eingegangen.

Funktionen, die elementare Systemoperationen im Zustandsraum ausführen, sind in Abschnitt A.3 erklärt. Eine Reihe weiterer Funktionen, die nicht unmittelbar im Hauptprogramm, sondern in den Moduln aufgerufen werden, sind in Abschnitt A.4 zusammgefaßt. Der Vollständigkeit halber sind in Abschnitt A.5 Routinen zur Darstellung einfacher Übertragungsfunktionen beschrieben, die das Werkzeug als Elemente der Gewichtungsmatrizen unterstützt.

A.1 Einführung

Die My H_∞Toolbox (MYT) wurde auf der Grundlage von Matlab [22] entwickelt. Sie besteht aus einer Reihe von *m-files*, die auf den Funktionen der Control System Toolbox [20] und der Robust-Control Toolbox [21] aufbauen.

Die My H_∞Toolbox ermöglicht auf dem Hintergrund der H_∞-Theorie den softwaregestützten Reglerentwurf. In der My H_∞Toolbox ist der Algorithmus von Green [14] implementiert. Als Spezifikation für das Programmsystem wurde [27] verwendet. Das Programm myhinf löst die in den Abschnitten 4.3 und 4.4 eingeführten H_∞-Probleme. Damit stehen sowohl *open* als auch *closed loop shaping* als Entwurfsmethoden zur Verfügung.

[9] Zwar existieren bereits leistungsfähige Werkzeuge für den H_∞-Entwurf [21, 32], jedoch sollen in dieser Arbeit ein neuer Algorithmus [14] und ein neues Verfahren (NLKF Entwurf) zur Anwendung kommen.

Die Programmstruktur ist in Abbildung A.1 gezeigt. Der linke Programmzweig deckt das S/KS/T Problem ab, das NLKF Problem wird im rechten Programmzweig gelöst.

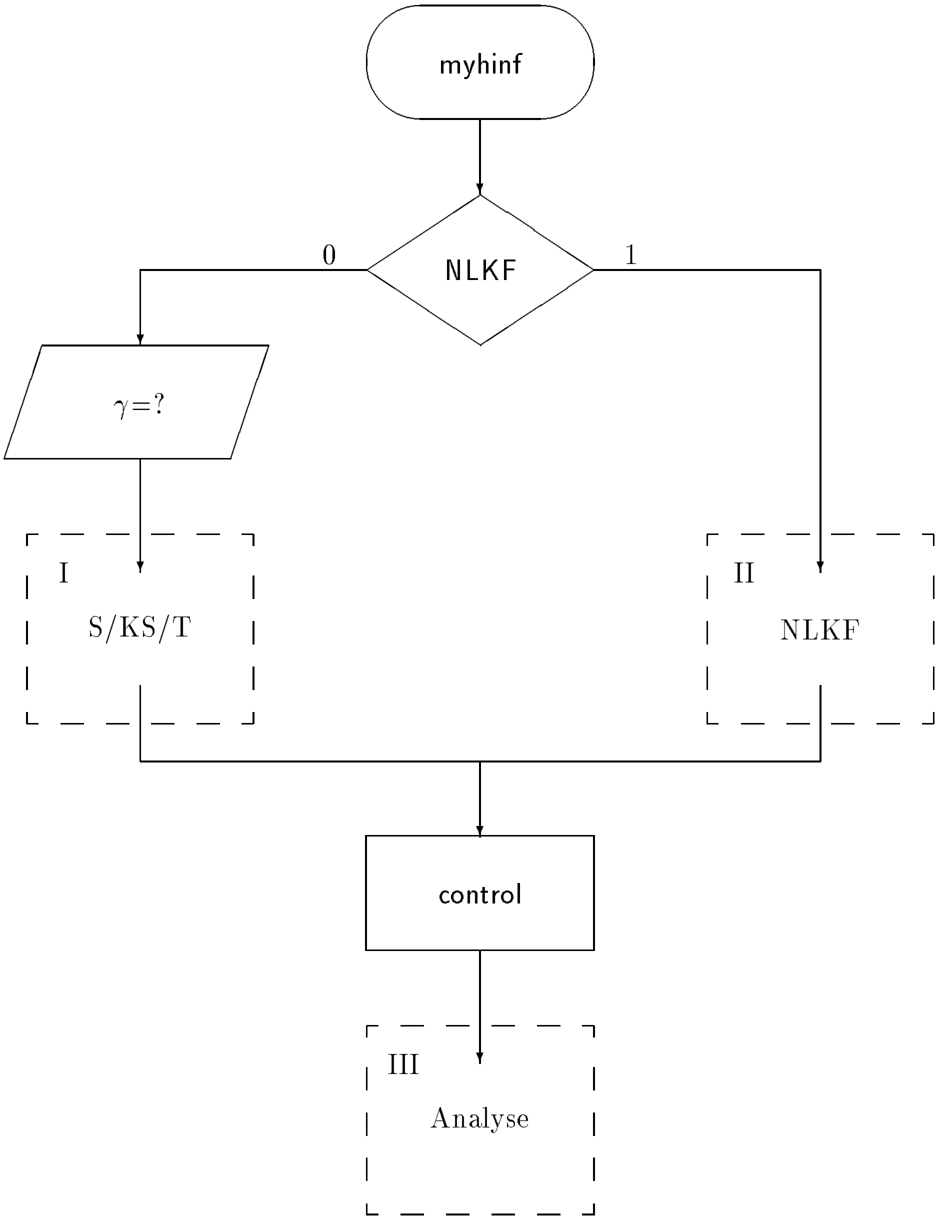


Abbildung A.1: Ablaufplan des Programms myhinf

Die Abbildungen A.2, A.3 und A.4 zeigen detailliertere Ausschnitte des Programms. Der Aufbau des Programms in Abschnitt I leitet sich ab aus der topologischen Unterteilung der H_∞-Aufgabenstellungen in „einfache“ bzw. „schwierige“ suboptimale Probleme.

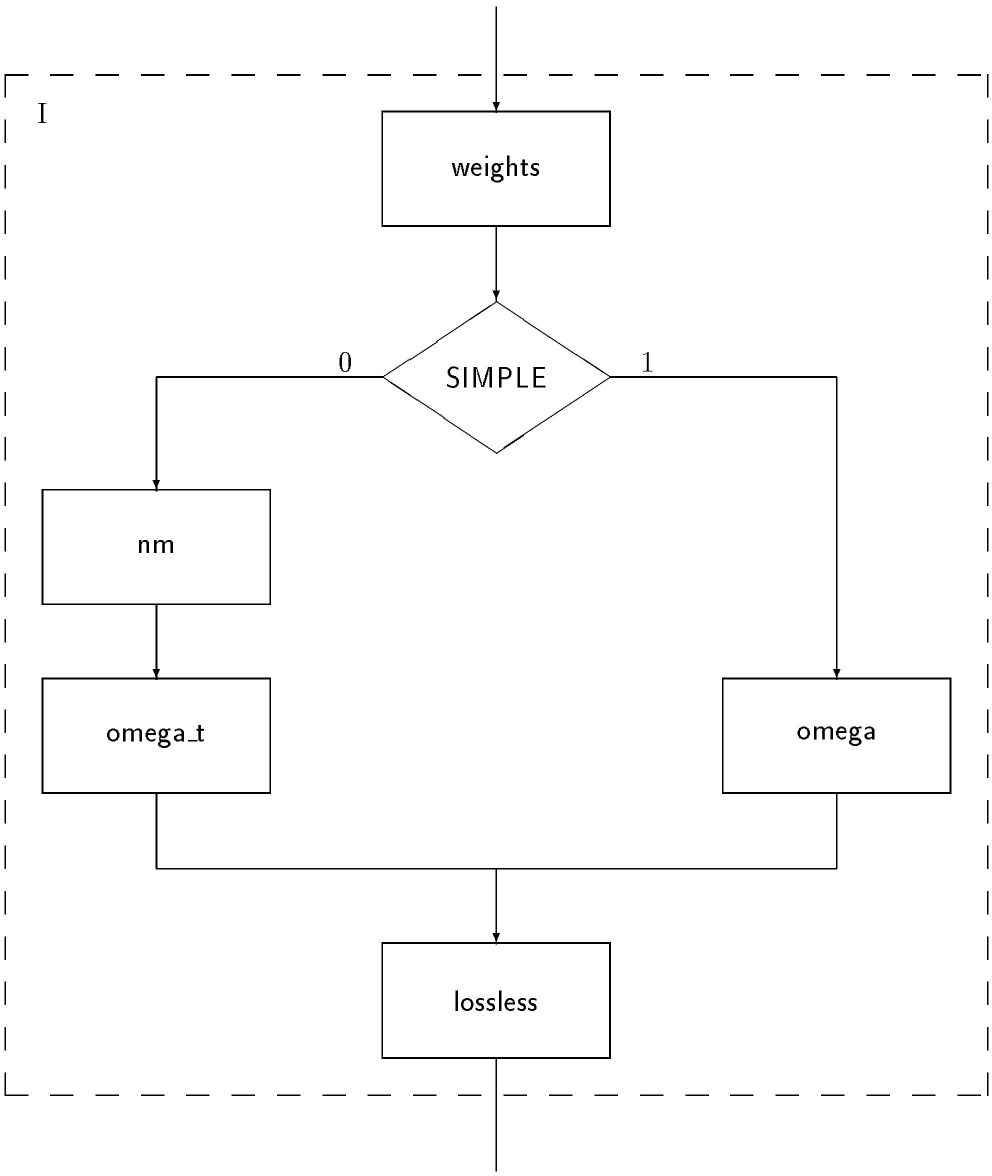


Abbildung A.2: Ausschnitt I des Programmablaufplans (S/KS/T Problem)

An die Berechnung der Reglers schließt sich ein Auswertungsteil an. In Programmabschnitt III erfolgt eine Analyse des Entwurfs, die die Eigenschaften des geschlossenen Kreises untersucht (s. Abbildung A.4).

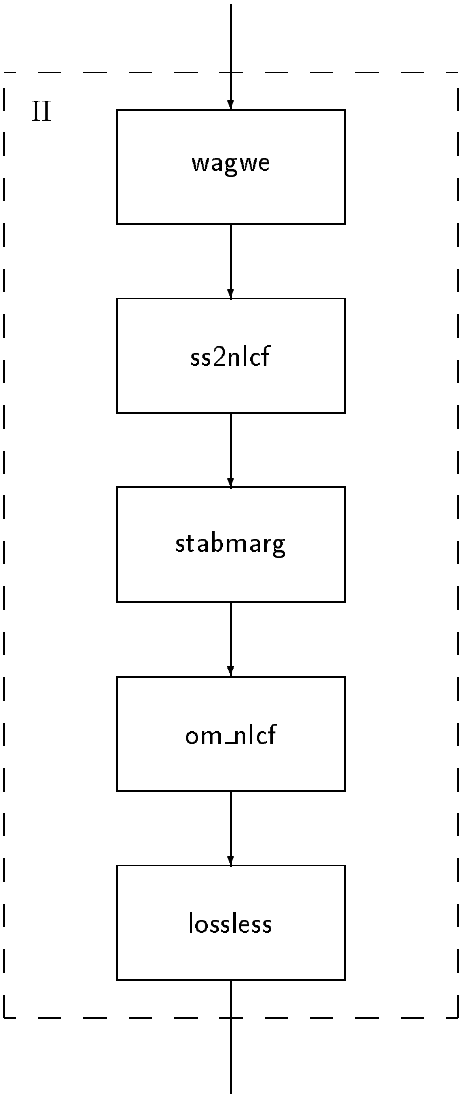


Abbildung A.3: Ausschnitt II des Programmablaufplans (NLKF Problem)

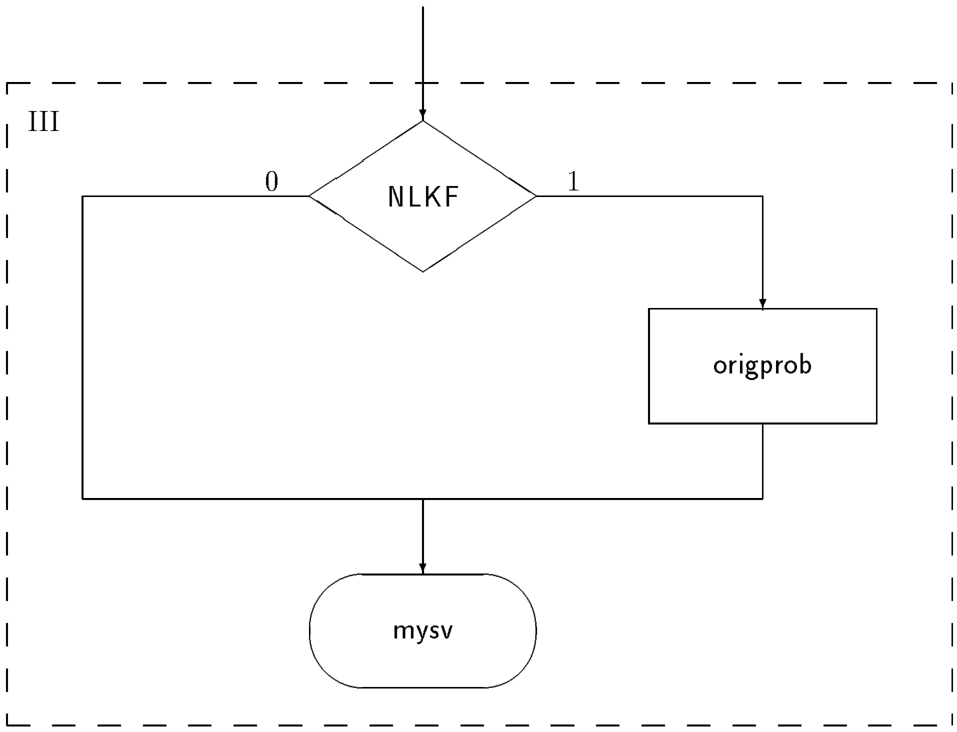


Abbildung A.4: Ausschnitt III des Programmablaufplans (Bewertung des Entwurfs)

A.2 Algorithmus

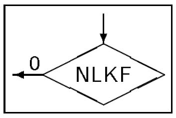
Um bei der Implementierung des Algorithmus die kompakte Notation in [27] möglichst weitgehend auf die Programmstruktur abzubilden, wird ein Datentyp verwendet, der die in Abschnitt 4.1 b) eingeführte Schreibweise unterstützt. Dadurch kann auch die Zahl der Ein- und Ausgabeparameter beim Funktionsaufruf in Grenzen gehalten werden.

Der Zustandsdarstellung (A, B, C, D) einer Übertragungsmatrix $G(s) = C\,(sI_n - A)^{-1} B + D$ wird eineindeutig das Matrizentupel $\left(\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right], n\right)$ zugeordnet, es gilt:

$$(A, B, C, D) \xrightarrow{\mathsf{ss2sys}} \left(\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right], n\right), \quad n = \dim(A)\,. \tag{A.1}$$

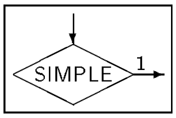
Hin- und Rücktransformation sind in den *m-files* ss2sys (s. Abschnitt A.4) und sys2ss aus [21] realisiert. Sie werden in der MY H_∞ TOOLBOX als Ausgabe- bzw. Eingabeschnittstelle übergeordneter Funktionen verwendet.

Myhinf



In der Regel kann das S/KS/T Problem nicht analytisch gelöst werden. Die γ-Iteration führt auf Approximationslösungen, die in einer beliebig kleinen Umgebung des absoluten Minimums liegen. Im folgenden wird ein Programmlauf dargestellt:

□ [S,KS,T,i,G,nSKSTiG]=weights(A,B,C,D), Weights definiert das S/KS/T Problem gemäß Gleichung (4.30). Die Prozedur stellt dem Algorithmus die Zustandsdarstellungen der Gewichte $W_S(s)$, $W_{KS}(s)$, $W_T(s)$ und $W_i(s)$ sowie des Streckenmodells $G(s) \rightarrow$ [S, KS, T, i, G, nSKSTiG] zur Verfügung (nSKSTiG = [nS nKS nT ni nG]). Die Eingabeparameter (A, B, C, D) $\leftarrow$ (A, B, C, D) sind eine Zustandsdarstellung des Streckenmodells.

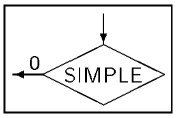


Sind sowohl das Streckenmodell $G(s)$ als auch die Gewichte $W_S(s)$, $W_{KS}(s)$ und $W_T(s)$ stabile Übertragungsmatrizen, und gilt $W_i(s) \in \mathcal{UH}_\infty^{p\times p}$, liegt ein „einfaches“ suboptimales Problem vor (2-Block-Problem mit quadratischem P_{21}). Die Aufgabe kann mittels einer algebraischen Riccati-Gleichung gelöst werden.

□ [Om,nOm]=omega(S,KS,T,i,G,nSKSTiG), Omega erzeugt aus einer linkskoprimen Faktorisierung des verallgemeinerten Streckenmodells $P(s) = M_P^{-1}(s)N_P(s) \in \mathcal{R}^{(l+p)\times(p+q)}$ die Matrix $\Omega(s) \rightarrow$ [Om, nOm]

$$\Omega = \begin{bmatrix} N_{P_{12}} & -M_{P_{12}} \\ -N_{P_{22}} & M_{P_{22}} \end{bmatrix} . \tag{A.2}$$

Algorithmus: s. Abschnitt 7 c)α) in [27]



Liegt ein 2-Block-Problem mit einem grenz- oder instabilen Streckenmodell oder ein allgemeines 4-Block-Problem, also ein „schwieriges“ suboptimales Problem vor, verläuft der Rechengang in zwei Schritten (s. linker Programmzweig in Abbildung A.3). Zunächst wird der komplizierte Fall auf ein einfaches Problem reduziert. Das einfache Problem ist charakterisiert durch die verallgemeinerte Regelstrecke:

$$P_t = \begin{bmatrix} I_l & \hat{M}_{P_{22}} \\ 0 & \hat{M}_{P_{12}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & \hat{N}_{P_{22}} \\ I_p & \hat{N}_{P_{12}} \end{bmatrix} . \tag{A.3}$$

In einem zweiten Schritt wird das einfache suboptimale Problem für $P_t(s)$ gelöst. Insgesamt werden zwei J_γ-verlustfreie Faktorisierungen durchgeführt.

□ [NM,nNM]=nm(S,KS,T,i,G,nSKSTiG), Nm erzeugt eine linkskoprime Faktorisierung $[\, N_P \quad M_P \,] \rightarrow$ [NM, nNM] des dem S/KS/T Problem zugeordneten verallgemeinerten Streckenmodells $P(s)$.

ALGORITHMUS:

$[\, N_P \quad M_P \,] \cong$

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}
A_S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [0 \;\; 0 \;\; 0] & -B_S \\
0 & A_{KS} & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{KS} & [0 \;\; 0 \;\; 0] & 0 \\
0 & 0 & A_T & 0 & -B_T C_i & -B_T D_i & 0 & [0 \;\; 0 \;\; 0] & B_T \\
0 & 0 & 0 & A+HC & HC_i & HD_i & B+HD & [0 \;\; 0 \;\; 0] & -H \\
0 & 0 & 0 & 0 & A_i & B_i & 0 & [0 \;\; 0 \;\; 0] & 0 \\
\hline
C_S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [I_p \;\; 0 \;\; 0] & -D_S \\
0 & C_{KS} & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{KS} & [0 \;\; I_q \;\; 0] & 0 \\
0 & 0 & C_T & 0 & -D_T C_i & -D_T D_i & 0 & [0 \;\; 0 \;\; I_p] & D_T \\
0 & 0 & 0 & C & C_i & D_i & D & [0 \;\; 0 \;\; 0] & -I_p
\end{array}\right]^{10} . \tag{A.4}$$

Ist $P_{22}(s)$ mit u' stabilisierbar und durch y' entdeckbar, so ist die Existenz einer Ausgangsrückführung H, die die Eigenwerte der Matrix A in die linke offene Halbebene verschiebt, gewährleistet [25].

□ [Om,nOm]=omega_t(NM,nNM,p,q,gamma), Omega_t berechnet aus $[\, N_P \quad M_P \,]$ über eine zweite linkskoprime Faktorisierung $[\, \hat{N}_P \quad \hat{M}_P \,]$ der verallgemeinerten Regelstrecke die Matrix $\Omega_t(s) \rightarrow$ [Om, nOm] mit:

$$\Omega_t = \begin{bmatrix} \hat{N}_{P_{22}} & -\hat{M}_{P_{22}} \\ -\hat{N}_{P_{12}} & \hat{M}_{P_{12}} \end{bmatrix} . \tag{A.5}$$

Omega_t ist eine der umfangreichsten Funktionen des Programms. Beispielhaft soll auf die einzelnen Operationen im Inneren der Funktion näher eingegangen werden. Als erstes erzeugt omega_t aus der linkskoprimen Faktorisierung $[\, N_P \quad M_P \,]$ die Matrix $N(s) \in \mathcal{RH}_\infty^{(p+l)\times(p+l)}$

$$N = \begin{bmatrix} N_{P_{21}}^T & N_{P_{11}}^T \\ 0 & I_l \end{bmatrix} . \tag{A.6}$$

[10] Auf die Darstellung der Matrix $[\, N_P \quad M_P \,]$ wurde an dieser Stelle aus zwei Gründen nicht verzichtet. Zum einen sei auf das Minuszeichen des Eintrags $-H$ ausdrücklich hingewiesen, das in [27] nicht als solches zu erkennen ist. Zum anderen gibt die Richtigstellung Anlaß, exemplarisch die Dimensionalität des H_∞-Problems aufzuzeigen.

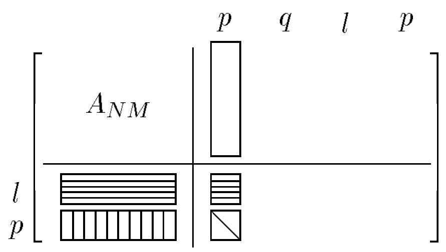


Abbildung A.5: Zerlegung der Übertragungsmatrix $[\,N_P \quad M_P\,]$

Die Abbildungen A.5 und A.6 veranschaulichen, wie aus der linkskoprimen Faktorisierung $[\,N_P \quad M_P\,]$ eine Zustandsdarstellung von $N(s) \rightarrow$ [N, nN] abgeleitet werden kann.

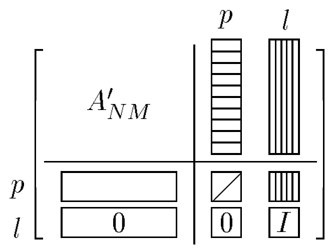


Abbildung A.6: Zerlegung der Übertragungsmatrix $N(s)$

Im zweiten Schritt wird eine J_γ-verlustfreie Faktorisierung durchgeführt. Omega_t berechnet $X(s) \in \mathcal{UH}_\infty^{(p+l)\times(p+l)} \rightarrow$ [X, nX], so daß $N(s)X^{T-1}(s)$ J_γ-verlustfrei ist ([XT,nXT]= lossless[11] (N,nN,l,p,p,gamma)). Die Matrix $X(s)$ hat die Zustandsdarstellung

$$X \cong \left[\begin{array}{c|c} A_{NM} & B_X \\ \hline \begin{bmatrix} 0 & I_p \\ I_l & 0 \end{bmatrix} C_{NM} & D_X \end{array}\right] . \tag{A.7}$$

[11] Die J_γ-verlustfreie Faktorisierung ist die zentrale Operation im Greenschen Algorithmus. Dementsprechend tritt die Funktion lossless in beiden Programmzweigen I und II auf. Zur besseren Übersichtlichkeit wird auf die Funktion in Abschnitt A.3 d) eingegangen.

Mit $X(s)$ und der Matrix $[\,N_P \quad M_P\,]$ ergibt sich als zweite linkskoprime Faktorisierung $[\,\hat{N}_P \quad \hat{M}_P\,] \cong$

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{NM} - B_X D_X^{-1} \begin{bmatrix} 0 & I_p \\ I_l & 0 \end{bmatrix} C_{NM} & B_{NM} - B_X D_X^{-1} \begin{bmatrix} 0 & I_p \\ I_l & 0 \end{bmatrix} D_{NM} \\ \hline D_X^{-1} \begin{bmatrix} 0 & I_p \\ I_l & 0 \end{bmatrix} C_{NM} & D_X^{-1} \begin{bmatrix} 0 & I_p \\ I_l & 0 \end{bmatrix} D_{NM} \end{array}\right] . \tag{A.8}$$

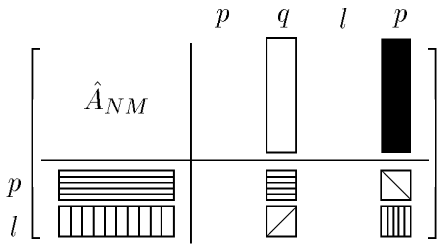


Abbildung A.7: Zerlegung der Übertragungsmatrix $[\,\hat{N}_P \quad \hat{M}_P\,]$

Die Abbildungen A.7 und A.8 zeigen, wie schließlich aus einer Zerlegung von $[\,\hat{N}_P \quad \hat{M}_P\,]$ eine Zustandsdarstellung von $\Omega_t(s) \rightarrow$ [Om, nOm] generiert wird.

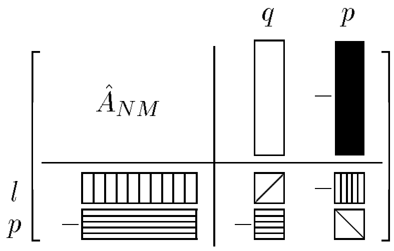
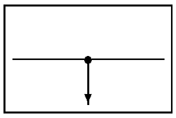


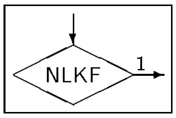
Abbildung A.8: Zerlegung der Übertragungsmatrix $\Omega_t(s)$

ALGORITHMUS: s. Abschnitt 6 c)β) in [27]



□ [W,nW]=lossless(Om,nOm,p,q,l,gamma), Lossless berechnet $W(s) \in \mathcal{UH}_\infty^{(q+p)\times(q+p)} \rightarrow$ [W, nW], so daß $\Omega(s)W^{-1}(s)$ bzw. $\Omega_t(s)W^{-1}(s)$ J_γ-verlustfrei ist. $W(s)$ ist der Erzeuger aller Lösungen.

ALGORITHMUS: s. Abschnitt A.3 d)



Das NLKF Problem gehört zu der Klasse einfacher H_∞-Probleme. Eine algebraische Riccati-Gleichung muß gelöst werden, um eine normalisierte linkskoprime Faktorisierung des gewichteten Streckenmodells $G_w(s)$ zu berechnen, eine zweite für die J_γ-verlustfreie Faktorisierung der Matrix $\Omega(s)$.

□ [Wa,G,We,Gw,nWaGWeGw]=wagwe(A,B,C,D), Wagwe definiert das NLKF Problem, den Gleichungen (4.34) und (4.35) entsprechend. Die Prozedur stellt dem Algorithmus die Zustandsdarstellungen der Gewichte $W_e(s)$ und $W_a(s)$, der nominellen Regelstrecke $G(s)$ sowie des gewichteten Streckenmodells $G_w(s) \rightarrow$ [Wa, G, We, Gw, nWaGWeGw] zur Verfügung (nWaGWeGw = [nWa nG nWe nGw]). Die Eingabeparameter (A, B, C, D) $\leftarrow (A, B, C, D)$ sind eine Zustandsdarstellung des Streckenmodells.

□ [NMw,nNMw,p,q]=ss2nlcf(Gw,nGw), Ss2nlcf berechnet die normalisierte linkskoprime Faktorisierung $[\, N_w \quad M_w \,] \rightarrow$ [NMw, nNMw] des gewichteten Streckenmodells $G_w(s)$

$$G_w(s) = M_w^{-1}(s) N_w(s). \tag{A.9}$$

Algorithmus: s. Abschnitt A.3 b)

Im Fall des NLKF Problems kann das Minimum des H_∞-Kriteriums explizit angegeben werden. Die γ-Iteration entfällt.

□ gammin=stabmarg(NMw,nNMw), Stabmarg berechnet die maximale Stabilitätsreserve $\varepsilon_{\max} = \gamma_{\min}^{-1}$, $\gamma_{\min} \rightarrow$ gammin. Stabmarg verwendet die Funktion norm_h aus Abschnitt A.4.

Algorithmus:

$$\gamma_{\min} = \sqrt{\frac{1}{1 - \|[\, N_w \quad M_w \,]\|_H^2}}\,. \tag{A.10}$$

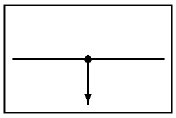
□ [Om,nOm]=om_nlcf(NMw,nNMw,p,q), Om_nlcf generiert aus der normalisierten linkskoprimen Faktorisierung des gewichteten Streckenmodells $G_w(s) = M_w^{-1}(s) N_w(s)$ die Matrix $\Omega(s) \rightarrow$ [Om, nOm]

$$\Omega = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ I_q \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} I_p \\ 0 \end{bmatrix} \\ -N_w & -M_w \end{bmatrix}. \tag{A.11}$$

Algorithmus: s. Abschnitt 8 b) in [27]

□ [W,nW]=lossless(Om,nOm,p,q,p+q,gamma), Lossless berechnet $W(s) \in \mathcal{UH}_\infty^{((p+q)+p)\times(q+p)} \rightarrow$ [W, nW], so daß $\Omega(s) W^{-1}(s)$ J_γ-verlustfrei ist. Das einfache suboptimale Problem wird aus numerischen Gründen für gamma $\leftarrow \gamma = 1.05 \cdot \gamma_{\min}$ gelöst.

Algorithmus: s. Abschnitt A.3 d)

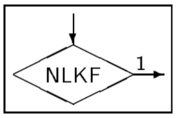


□ [K,nK]=control(W,nW,q,p), Control berechnet die zentrale Lösung des suboptimalen H_∞-Problems ($B(s) = 0 \in \mathcal{RH}_\infty^{q\times p}$). Aus der rechtskoprimen Faktorisierung

$$\begin{bmatrix} K_N \\ K_M \end{bmatrix} = W^{-1} \begin{bmatrix} B \\ I_p \end{bmatrix} \tag{A.12}$$

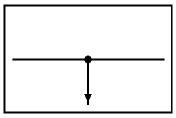
wird eine Minimalrealisierung für $K \to$ [K, nK] ermittelt. Control verwendet dazu die Funktion rcf2ss aus Abschnitt A.3 c).

ALGORITHMUS: s. Abschnitt 6 c)α)



□ [K,nK]=origprob(Wa,We,nWaGWeGw,K,nK), Origprob führt die Rücktransformation von [K, nK] $\leftarrow K_w(s)$ auf das ursprüngliche Problem durch $K(s) \to$ [K, nK]

$$K(s) = W_e(s)K_w(s)W_a(s)\,. \tag{A.13}$$



□ [Ao,Bo,Co,Do]=mysv(K,nK,G,nG,w), Mysv berechnet die Übertragungsmatrix des offenen Kreises $G_o(s) \to$ [Ao, Bo, Co, Do]. Darüber hinaus werden die Eigenschaften des geschlossenen Regelkreises über einem gegebenen Frequenzbereich w $\leftarrow \omega$ analysiert. Für die Bewertung des Entwurfs werden folgende regelungstheoretischen Maße berechnet:

- $\bar{\sigma}\,[S(j\omega)]$ (Führungs- und Störverhalten),
- $\bar{\sigma}\,[S(j\omega)G(j\omega)]$ (Empfindlichkeit bzgl. Eingangsstörungen),
- $1/\bar{\sigma}\,[K(j\omega)S(j\omega)]$ (obere Schranke zulässiger additiver Modellfehler) und
- $1/\bar{\sigma}\,[T(j\omega)]$ (obere Schranke zulässiger multiplikativer Modellfehler).

A.3 Rechenregeln für Systeme in Zustandsdarstellung

Die Gliederung dieses Abschnitts entspricht der Struktur des Anhangs A in [27]. Die dort erklärten Operationen im Zustandsraum spezifizieren die im folgenden dargestellten Funktionen. Der Kern des Algorithmus, die J_γ-verlustfreie Faktorisierung einer Übertragungsmatrix, wird ausführlicher behandelt.

a) Grundoperationen

- ☐ [GT,nGT]=syst(G,nG), Syst berechnet die Transponierte $G^T(s) \to$ [GT, nGT] einer Übertragungsmatrix $G(s)$.

  ALGORITHMUS:

$$G^T(s) \cong \left[\begin{array}{c|c} A^T & C^T \\ \hline B^T & D^T \end{array}\right] \tag{A.14}$$

- ☐ [GI,nGI]=sysinv(G,nG), Hat der Durchgriff D einer Übertragungsmatrix $G(s)$ vollen Zeilen-(Spalten-)Rang, berechnet Sysinv mit Hilfe der Rechts-(Links-)Inversen $D^\dagger$ die Rechts-(Links)Inverse $G^\dagger(s) \to$ [GI, nGI].

  ALGORITHMUS:

$$G^\dagger(s) \cong \left[\begin{array}{c|c} A - BD^\dagger C & -BD^\dagger \\ \hline D^\dagger C & D^\dagger \end{array}\right] \tag{A.15}$$

- ☐ [G,nG]=sysmul(G1,nG1,G2,nG2), Gegeben seien die Übertragungsmatrizen $G_1(s) \in \mathcal{R}^{p_1 \times q_1}$ und $G_2(s) \in \mathcal{R}^{q_1 \times q_2}$. Sysmul berechnet die Übertragungsmatrix $G(s) \to$ [G, nG] der Reihenschaltung

$$G(s) = G_1(s)G_2(s)\,. \tag{A.16}$$

  ALGORITHMUS: s. Abschnitt A a) in [27]

- ☐ [G,nG]=systaple(G1,nG1,G2,nG2), Gegeben seien die Übertragungsmatrizen $G_1(s) \in \mathcal{R}^{p_1 \times q}$ und $G_2(s) \in \mathcal{R}^{p_2 \times q}$. Systaple berechnet eine Zustandsdarstellung von $G(s) \to$ [G, nG] mit

$$G(s) = \begin{pmatrix} G_1(s) \\ G_2(s) \end{pmatrix}\,. \tag{A.17}$$

  ALGORITHMUS: s. Abschnitt A a) in [27]

□ [G,nG]=sysd(G1,nG1,G2,nG2), Gegeben seien die Übertragungsmatrizen $G_1(s) \in \mathcal{R}^{p_1 \times q_1}$ und $G_2(s) \in \mathcal{R}^{p_2 \times q_2}$. Sysd berechnet eine Zustandsdarstellung von $G(s) \rightarrow$ [G, nG] mit

$$G(s) = \begin{pmatrix} G_1(s) & 0 \\ 0 & G_2(s) \end{pmatrix} . \tag{A.18}$$

ALGORITHMUS:

$$G(s) \cong \left[\begin{array}{cc|cc} A_1 & 0 & B_1 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & B_2 \\ \hline C_1 & 0 & D_1 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 & D_2 \end{array} \right] \tag{A.19}$$

b) Normalisierte linkskoprime Faktorisierung einer Übertragungsmatrix

□ [NM,nNM,p,q]=ss2nlcf(G,nG), Ss2nlcf berechnet die normalisierte linkskoprime Faktorisierung $[\,N(s) \quad M(s)\,] \rightarrow$ [NM, nNM] einer Übertragungsmatrix $G(s) \in \mathcal{R}^{p \times q}$, so daß gilt

$$G(s) = M^{-1}(s) N(s) . \tag{A.20}$$

ALGORITHMUS: s. Abschnitte A b) und c) in [27]

c) Berechnung einer Übertragungsmatrix aus einer rechtskoprimen Faktorisierung

□ [K,nK]=rcf2ss(NM,nNM,q,p), Rcf2ss berechnet aus der rechtskoprimen Faktorisierung $\begin{bmatrix} N(s) \\ M(s) \end{bmatrix}$ einer Übertragungsmatrix $K(s) \in \mathcal{RH}_\infty^{q \times p}$ die Zustandsdarstellung

$\left[\begin{array}{c|c} A_K & B_K \\ \hline C_K & D_K \end{array} \right] \rightarrow$ [K, nK], es gilt

$$K(s) = N(s) M^{-1}(s) . \tag{A.21}$$

ALGORITHMUS: s. Abschnitt A d) in [27]

d) J_γ-verlustfreie Faktorisierung

- □ [W,nW]=lossless(G,nG,p,q,l,gamma), Gegeben sei $G(s) \in \mathcal{RH}_\infty^{(l+p)\times(q+p)}$. Lossless berechnet $W(s) \in \mathcal{UH}_\infty^{(q+p)\times(q+p)} \to$ [W, nW], so daß $G(s)W^{-1}(s)$ J_γ-verlustfrei ist. Eine Lösung existiert dann und nur dann, wenn

  1. eine nichtsinguläre Matrix $D_W \in \mathrm{R}^{(q+p)\times(q+p)}$ existiert, so daß

$$D^T J_{\gamma\, lp} D = D_W^T J_{\gamma\, qp} D_W \,. \tag{A.22}$$

  Algorithmus:
  Sei $\bar{D} = D\tau$, so daß

$$\bar{D} = \begin{bmatrix} \bar{D}_{11} & \bar{D}_{12} \\ I_p & 0 \end{bmatrix} . \tag{A.23}$$

  Eine singuläre Wertezerlegung der Matrix $[\, D_{21} \quad D_{22}\,]$ ergibt

$$[\, D_{21} \quad D_{22}\,] = U\,[\, diag\,\{\sigma_i\} \quad 0\,]\,V \tag{A.24}$$

  mit den nichtsingulären Matrizen $U \in \mathrm{R}^{p\times p}$ und $V \in \mathrm{R}^{(p+q)\times(p+q)}$.
  Die Matrix $[\, D_{21} \quad D_{22}\,]$ hat voraussetzungsgemäß vollen Zeilenrang, P_{21} muß in $\mathcal{RL}_\infty$ rechtsinvertierbar sein. Dann

$$\tau = V^{-1} \begin{bmatrix} diag\,\{1/\sigma_i\} & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^{-1} & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix} . \tag{A.25}$$

  Betrachte das transformierte Problem:

$$\bar{D}^T J_{\gamma\, lp} \bar{D} = \bar{D}_W^T J_{\gamma\, qp} \bar{D}_W \tag{A.26}$$

  mit

$$\bar{D} = \begin{bmatrix} \bar{D}_{11} & \bar{D}_{12} \\ I_p & 0 \end{bmatrix} . \tag{A.27}$$

  Eine Lösung $\bar{D}_W$ existiert dann und nur dann, wenn

  a) $\bar{D}_{12}^T \bar{D}_{12}$ positiv definit und
  b) $\phi - \gamma^2 I_p$ negativ definit ist mit

$$\phi = \bar{D}_{11}^T \left[I_l - \bar{D}_{12} \left(\bar{D}_{12}^T \bar{D}_{12} \right)^{-1} \bar{D}_{12}^T \right] \bar{D}_{11} \,. \tag{A.28}$$

Eine Lösung ist:

$$\bar{D}_W = \begin{bmatrix} \left(\bar{D}_{12}^T \bar{D}_{12}\right)^{-1/2} \bar{D}_{12}^T \bar{D}_{11} & \left(\bar{D}_{12}^T \bar{D}_{12}\right)^{1/2} \\ 1/\gamma \cdot \left(\gamma^2 I_p - \phi\right)^{1/2} & 0 \end{bmatrix}. \tag{A.29}$$

Rücktransformation: $D_W = \bar{D}_W \tau^{-1}$

2. eine positiv semidefinite Lösung Q der verallgemeinerten indefiniten Matrix-Riccati-Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= Q\left(A - BR_\gamma D^T J_{\gamma\, lp} C\right) + \left(A - BR_\gamma D^T J_{\gamma\, lp} C\right)^T Q + \ldots \\ &\quad -QBR_\gamma B^T Q + C^T J_{\gamma\, lp} C - C^T J_{\gamma\, lp} D R_\gamma D^T J_{\gamma\, lp} C \end{aligned} \tag{A.30}$$

$$R_\gamma = (D^T J_{\gamma\, lp} D)^{-1} \tag{A.31}$$

   existiert, so daß alle Eigenwerte der Matrix $A - BR_\gamma \left(D^T J_{\gamma\, lp} C + B^T Q\right)$ links der imaginären Achse liegen.

Sind diese Bedingungen erfüllt, so erhält man eine Lösung W aus

$$W \cong \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C_W & D_W \end{array}\right] \tag{A.32}$$

$$C_W = J_{\gamma\, qp}^{-1} \left(D_W^{-1}\right)^T \left(D^T J_{\gamma\, lp} C + B^T Q\right). \tag{A.33}$$

A.4 Weitere Funktionen

Die in diesem Abschnitt zusammengefaßten Funktionen führen weniger umfangreiche Berechnungen durch, um Zwischenergebnisse innerhalb der Funktionen der Abschnitte A.2 und A.3 bereitzustellen.

□ J=jglp(gamma,l,p), Jglp erzeugt die Matrix $J_{\gamma\, lp} \rightarrow$ J mit

$$J_{\gamma\, lp} = \begin{bmatrix} I_l & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I_p \end{bmatrix} . \tag{A.34}$$

□ N=lftinv(M), Lftinv berechnet die Links- bzw. Rechtsinverse $N \in \mathrm{R}^{n\times m} \rightarrow$ N einer Matrix $M \in \mathrm{R}^{m\times n}$ mit Spalten- bzw. Zeilenrang $r = \min(m, n)$, so daß

$$N \cdot M = I_r \quad \text{bzw.} \quad M \cdot N = I_r \, . \tag{A.35}$$

ALGORITHMUS: s. Abschnitt 9.5 in [34]

□ rho=norm_h(G,nG), Norm_h berechnet die Hankel-Norm $\|G\|_H \rightarrow$ rho einer asymptotisch stabilen Übertragungsmatrix $G(s)$

$$\|G(s)\|_H = \sqrt{\lambda_{\max}\left[P_c P_o\right]} \, . \tag{A.36}$$

ALGORITHMUS: s. Abschnitt C.6 in [29]

□ pd=posdef(M), Posdef überprüft eine Matrix $M \in \mathrm{R}^{m\times m}$ auf positive Definitheit; sind alle Hauptabschnittsdeterminanten größer Null wird pd der Wert 1 zugewiesen, sonst 0.

□ [G,nG]=ss2sys(A,B,C,D), Ss2sys ordnet einer Übertragungsmatrix $G(s) = C\,(sI_n - A)^{-1}\,B + D$ das Matrizentupel $\left(\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right], n\right) \rightarrow$ [G, nG] zu, n gibt die Zahl der Zustände an.

□ [G,nG]=syserial(G1,nG1,G2,nG2), Gegeben seien die Übertragungsmatrizen $G_1(s) \in \mathcal{R}^{p_1\times q_1}$ und $G_2(s) \in \mathcal{R}^{q_1\times q_2}$. Syserial berechnet die Minimalrealisierung von $G(s) \rightarrow$ [G, nG] mit

$$G(s) = G_1(s) G_2(s) \, . \tag{A.37}$$

Im Gegensatz zu sysmul eliminiert syserial nicht steuer- und/oder nicht beobachtbare Zustände.

A.5 Zustandsdarstellungen einfacher Übertragungssysteme

Die im folgenden aufgelisteten Funktionen unterstützen nicht den in Abschnitt A.2 eingeführten Datentyp, weil sie nicht in unmittelbarem Zusammenhang mit der H_∞-Theorie zu sehen sind. Vielmehr orientiert sich die Bezeichnung der formalen Parameter und die Parametrierung der Übertragungsfunktionen an der klassischen Regelungstheorie.

□ [A,B,C,D]=p(K), P berechnet eine Zustandsdarstellung der Übertragungsfunktion $G(s) \rightarrow [\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}, \mathsf{D}]$ mit

$$G(s) = K\,, \tag{A.38}$$

Eingabeparameter ist der Verstärkungsfaktor K.

□ [A,B,C,D]=pt1(K,T1), Pt1 berechnet eine Zustandsdarstellung der Übertragungsfunktion $G(s) \rightarrow [\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}, \mathsf{D}]$ mit

$$G(s) = \frac{K}{T_1 s + 1}\,, \tag{A.39}$$

Eingabeparameter sind der Verstärkungsfaktor K und die Zeitkonstante T_1.

□ [A,B,C,D]=pdt1(K,Td,T1), Pdt1 berechnet eine Zustandsdarstellung der Übertragungsfunktion $G(s) \rightarrow [\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}, \mathsf{D}]$ mit

$$G(s) = \frac{K\,(1 + T_D s)}{T_1 s + 1}\,, \tag{A.40}$$

Eingabeparameter sind der Verstärkungsfaktor K, die Vorhaltzeit T_D und die Zeitkonstante T_1.

□ [A,B,C,D]=pt2(K,T1,T2), Pt2 berechnet eine Zustandsdarstellung der Übertragungsfunktion $G(s) \rightarrow [\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}, \mathsf{D}]$ mit

$$G(s) = \frac{K}{T_2^2 s^2 + T_1 s + 1}\,, \tag{A.41}$$

Eingabeparameter sind der Verstärkungsfaktor K, und die Zeitkonstanten T_1 und T_2.

□ [A,B,C,D]=pdt2(K,Td,T1,T2), Pdt2 berechnet eine Zustandsdarstellung der Übertragungsfunktion $G(s) \rightarrow [\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}, \mathsf{D}]$ mit

$$G(s) = \frac{K\,(1 + T_D s)}{T_2^2 s^2 + T_1 s + 1}\,, \tag{A.42}$$

Eingabeparameter sind der Verstärkungsfaktor K, die Vorhaltzeit T_D und die Zeitkonstanten T_1 und T_2.

□ [A,B,C,D]=pidt1(K,Ti,Td,T1), Pidt1 berechnet eine Zustandsdarstellung der Übertragungsfunktion $G(s) \rightarrow [\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}, \mathsf{D}]$ mit

$$G(s) = \frac{K\,(1 + 1/(T_I s) + T_D s)}{T_1 s + 1}\,, \tag{A.43}$$

Eingabeparameter sind der Verstärkungsfaktor K, die Nachstellzeit T_I, die Vorhaltzeit T_D und die Zeitkonstante T_1.

B Test des Werkzeugs

Zur Validierung des entstandenen Programmsystems werden drei verschiedene H_∞-Probleme aus der Literatur betrachtet: ein analytisch lösbares KS Problem aus [1], ein S/T Problem aus [21] und ein NLKF Entwurf aus [23]. Im folgenden wird zunächst das KS Problem ausführlich diskutiert, um den Algorithmus exemplarisch darzustellen und einen Eindruck hinsichtlich des numerischen Aufwands zu vermitteln. Die beiden anderen Aufgaben werden skizziert und bzgl. ihrer Ergebnisse bewertet.

B.1 KS Problem

In [1] wird der Algorithmus aus [5] am Beispiel eines instabilen PT_1-Glieds, das robust bzgl. additiver Modellfehler stabilisiert werden soll, vorgeführt. Das nominelle Modell $G(s)$ ist gegeben durch:

$$G(s) = \frac{1}{s-1}\,. \tag{B.1}$$

Für den unstrukturierten Modellfehler $\delta G(s)$ kann über der Frequenz eine obere Schranke angegeben werden:

$$|\delta G(j\omega)| < a \quad \forall \omega > 0\,; \tag{B.2}$$

das reale Modell $G'(s)$ setzt sich aus dem nominellen Modell und dem unstrukturierten Modellfehler zusammen:

$$G'(s) = G(s) + \delta G(s)\,. \tag{B.3}$$

Formuliert man das H_∞-Problem, so ergibt sich für die über alle stabilisierenden Regler $K(s)$ zu minimierende Norm und die zugehörige verallgemeinerte Regelstrecke $P(s)$

$$\left\| aK(I+GK)^{-1} \right\|_\infty \leq 1\,, \tag{B.4}$$

$$P(s) = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -1 & -1/(s-1) \end{bmatrix}. \tag{B.5}$$

Dieses spezielle Problem kann aus dem allgemeinen S/KS/T Problem durch eine geeignete Wahl der Gewichte abgeleitet werden, im Zustandsraum erhält man:

$$G(s) \cong \left[\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right], \tag{B.6}$$

$$W_i(s) \cong \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right], \qquad W_S(s) \cong \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right], \tag{B.7}$$

$$W_{KS}(s) \cong \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & a \end{array}\right], \qquad W_T(s) \cong \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]. \tag{B.8}$$

Da das Modell einen Pol in der rechten Halbebene aufweist, handelt es sich nach der Bezeichnungsweise aus [27] um ein „schwieriges“ H_∞- Problem. D. h., durch die Minimierung der Norm (B.4) kann der Programmzweig NLCF=0 und SIMPLE=0 (s. linke Hälfte der Abbildung A.2 in Abschnitt A.1) getestet werden. Zunächst wird die linkskoprime Faktorisierung $P = M_P^{-1} N_P$ berechnet:

$[\, N_P \quad M_P \,] \cong$

$$\left[\begin{array}{ccccc|cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]. \tag{B.9}$$

Aus der linkskoprimen Faktorisierung wird eine Übertragungsmatrix $N(s)$ generiert, die mit $X(s)$ J_γ-verlustfrei zu faktorisieren ist.

$N(s) \cong$

$$\left[\begin{array}{ccccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \tag{B.10}$$

1. J_γ-verlustfreie Faktorisierung

Mit $\gamma = 1$, $l = 1$ und $p = 3$ ergeben sich die die Faktorisierung bestimmenden Matrizen $J_{\gamma\, lp}$ $(q = l)$ und R_γ zu

$$J_{113} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{B.11}$$

Die verallgemeinerte indefinite Matrix-Riccati-Gleichung läßt sich für das vorliegende Problem auf eine skalare Riccati-Gleichung reduzieren:

$$2q - q^2 = 0 \qquad \Rightarrow q = 2\,. \tag{B.12}$$

$X(s)$ faktorisiert $N(s)$ J_γ-verlustfrei,

$X(s) \cong$

$$\left[\begin{array}{ccccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]. \tag{B.13}$$

$[\, N_P \quad M_P \,]$ und $X(s)$ definieren eine zweite linkskoprime Faktorisierung der verallgemeinerten Regelstrecke $P(s)$,

$[\, \hat{N}_P \quad \hat{M}_P \,] \cong$

$$\left[\begin{array}{ccccc|cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]. \tag{B.14}$$

Mit $[\, \hat{N}_P \quad \hat{M}_P \,]$ ist der komplizierte Fall in ein einfaches Problem überführt, dessen Lösung durch eine zweite J_γ-verlustfreie Faktorisierung $\Omega_t(s)W^{-1}(s)$ gewonnen wird.

$\Omega_t(s) \cong$

$$\left[\begin{array}{ccccc|cc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1
\end{array}\right] \tag{B.15}$$

2. J_γ-verlustfreie Faktorisierung

Mit $\gamma = 1$, $l = 3$, $p = 1$ und $q = 1$ ergeben sich die die Faktorisierung bestimmenden Matrizen $J_{\gamma\, lp}$ und $J_{\gamma\, qp}$ zu

$$J_{131} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad J_{111} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{B.16}$$

2.1 Berechnung von D_W

Die singuläre Wertezerlegung von $[0 \quad -1]$: $U = 1$, $S = [1 \quad 0]$ und $V = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ führt auf eine Transformationsmatrix τ

$$\tau = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{B.17}$$

die die Berechnung von D_W auf ein einfacheres Problem zurückführt mit

$$\bar{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -a \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{B.18}$$

Für die Matrizen $\bar{D}_{11} = [0 \quad 0 \quad 0]^T$ und $\bar{D}_{12} = [0 \quad -a \quad 0]^T$ gilt: $\bar{D}_{12}^T \bar{D}_{12} = a^2$ und $1 - \phi = 1$ sind positiv definit. Damit ergeben sich $\bar{D}_W$ und nach Rücktransformation D_W zu

$$\bar{D}_W = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_W = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{B.19}$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1/a^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{B.20}$$

Durch R_1, J_{131} und Ω_t ist die zweite skalare Riccati-Gleichung bestimmt

$$2q - \big(1/a^2 - 4\big)q^2 = 0 \qquad \Rightarrow q = 2/\big(1/a^2 - 4\big)\,. \tag{B.21}$$

$W(s)$ faktorisiert $\Omega_t(s)$ J_γ-verlustfrei,

$W(s) \cong$

$$\left[\begin{array}{ccccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -q/a & 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(1+2q) & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]. \tag{B.22}$$

Mit $W^{-1}(s) \cong$

$$\left[\begin{array}{ccccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1/a & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & q/a^2 & 0 & -1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+2q & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \tag{B.23}$$

und $S(s)$

$$S(s) \cong \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \hline \mathrm{C} & \mathrm{D} \\ 0 & 1 \end{array}\right] \tag{B.24}$$

können alle Lösungen gemäß der folgenden Gleichung erzeugt werden:

$$\begin{bmatrix} K_N \\ K_M \end{bmatrix} \cong$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \mathrm{C}/a & \mathrm{D}/a-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \hline 0 & 0 & 0 & q/a^2 & 0 & -\mathrm{C}/a & -\mathrm{D}/a \\ 0 & 0 & 0 & (1+2q) & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]. \tag{B.25}$$

Elimination nicht beobachtbarer und nicht steuerbarer Zustände von $\begin{bmatrix} K_N \\ K_M \end{bmatrix}$ führt auf:

$$\begin{bmatrix} K_N \\ K_M \end{bmatrix} \cong \left[\begin{array}{cc|c} -1 & \mathrm{C}/a & \mathrm{D}/a-2 \\ 0 & \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \hline 2/(1-4a^2) & -\mathrm{C}/a & -\mathrm{D}/a \\ 1/(1-4a^2) & 0 & -1 \end{array}\right]. \tag{B.26}$$

Für eine spezielle dezentrale Lösung $\left[\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \hline \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & 2a \end{array}\right]$ hat der resultierende Regler eine besonders einfache Gestalt:

$$\begin{bmatrix} K_N \\ K_M \end{bmatrix} \cong \left[\begin{array}{c|c} -1 & 0 \\ \hline 2/(1-4a^2) & -2 \\ 1/(1-4a^2) & -1 \end{array}\right], \quad K = K_N K_M^{-1} = 2\,. \tag{B.27}$$

Die Sensitivitätsfunktion ist ein Allpaß 1.Ordnung. Abbildung B.1 zeigt die Amplitudengänge der Sensitivität und der komplementären Sensitivität.

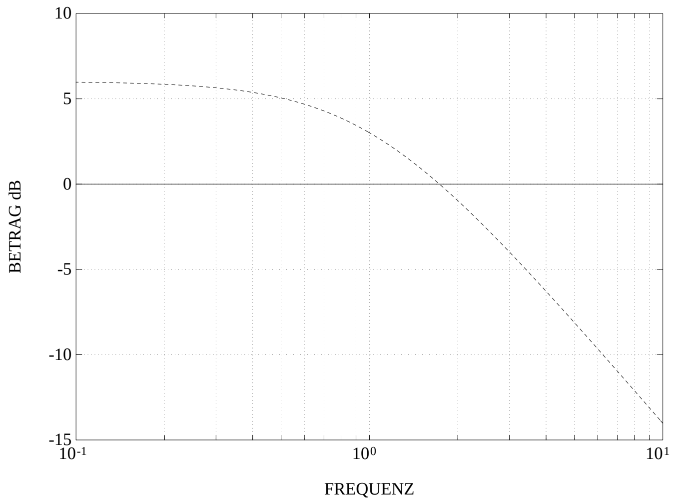


Abbildung B.1: Verläufe der singulären Werte: $\bar{\sigma}\,[S(j\omega)]$ (durchgezogen) und $\bar{\sigma}\,[T(j\omega)]$ (unterbrochen), KS Problem

B.2 S/T Problem

Das Demonstrationsprogramm der Robust-Control Toolbox rctdemo enthält u. a. als Entwurfsbeispiel die H_∞-Regelung eines hydraulischen Antriebs. Der Antrieb ist als PT_3-Glied modelliert:

$$G(s) = \frac{9000}{s^3 + 30s^2 + 700s + 1000}\,. \tag{B.28}$$

Die Regelstrecke setzt sich aus dem Modell des Antriebs $G(s)$ und einem vorgeschalteten Halteglied 0. Ordnung mit einer Abtastzeit von $0.01\,s$ zusammen. Die regelungstechnischen Ziele werden als S/T Problem formuliert. Für gutes Führungsverhalten wird der Verlauf der Sensitivität durch das Gewicht $W_S(s)$ vorgegeben:

$$W_S(s) = \gamma \cdot \frac{100\,(1/30 \cdot s + 1)^2}{(s+1)^2}\,; \tag{B.29}$$

die Robustheit der Stabilität bzgl. multiplikativer Modellfehler ist mit dem Gewicht $W_T(s)$ bewertet

$$W_T(s) = \frac{1/10 \cdot s + 1}{3.16 \cdot (1/300 \cdot s + 1)}\,. \tag{B.30}$$

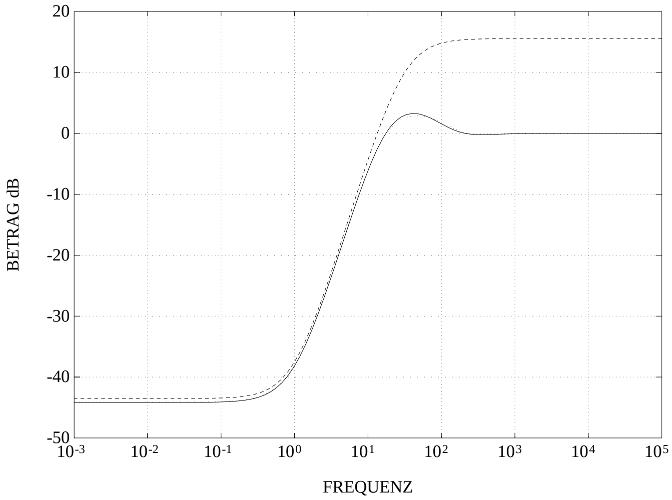


Abbildung B.2: Verlauf der Sensitivität $\bar{\sigma}\left[S(j\omega)\right]$: MYT (durchgezogen), RCT (punktiert), $\left|W_S^{-1}(j\omega)\right|$ (unterbrochen), S/T Problem

Sowohl das Streckenmodell $G(s)$ als auch die Gewichte $W_S(s)$ und $W_T(s)$ sind stabile Übertragungsfunktionen, und es gilt $W_i(s) = 1 \in \mathcal{UH}_\infty^{1\times 1}$. Das vorliegende Problem gehört damit zu der Klasse der einfachen suboptimalen Probleme und wird für $\gamma_{\min} = 1.5$ gelöst.

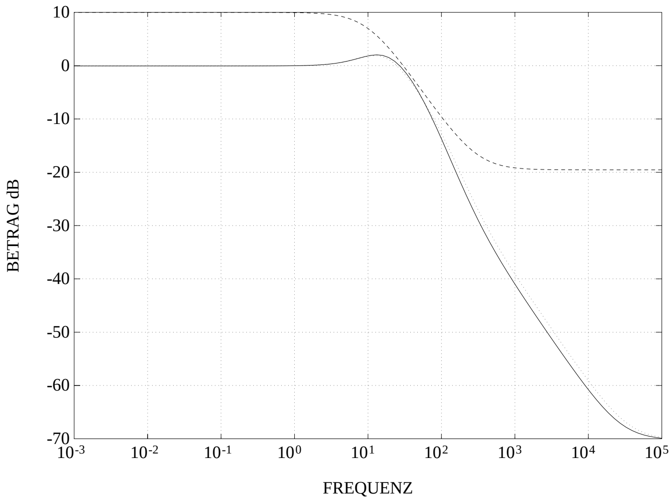


Abbildung B.3: Verlauf der komplementären Sensitivität $\bar{\sigma}\left[T(j\omega)\right]$: MYT (durchgezogen), RCT (punktiert), $\left|W_T^{-1}(j\omega)\right|$ (unterbrochen), S/T Problem

Die Abbildungen B.2 und B.3 zeigen eine sehr gute Übereinstimmung der Ergebnisse beider Algorithmen. Bemerkenswert ist, daß der Greensche Algorithmus [14], [27] der MY H_∞TOOLBOX (MYT) nur eine Matrix-Riccati-Gleichung löst, der in der ROBUST-CONTROL TOOLBOX implementierte Algorithmus dagegen für dasselbe Problem zwei Riccati-Gleichungen lösen muß (vgl. [5]).

Durch dieses Testbeispiel und den Entwurf aus Abschnitt B.1 ist eine Zweigüberdeckung im Programm für `NLCF=0` (s. linke Hälfte der Abbildung A.1 in Abschnitt A.1) erreicht.

B.3 NLKF Problem

McFarlane verwendet in [23] als Anwendungsbeispiel für die *Loop Shaping Design Procedure* die Lageregelung eines Satelliten. Dabei wird das Übertragungsverhalten des Stellmoments auf den Rollwinkel des Satelliten betrachtet, das durch die Zustandsdarstellung

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\omega^2 & -2\zeta\omega \end{bmatrix}, \tag{B.31}$$

$$B = [\,0 \quad 1.7319 \times 10^{-5} \quad 0 \quad 3.7859 \times 10^{-4}\,]^T\,, \tag{B.32}$$

$$C = [\,1 \quad 0 \quad 1 \quad 0\,]\,, \qquad D = 0\,, \tag{B.33}$$

beschrieben werden kann. Die Schwingungsfähigkeit des Systems ist durch die Eigenfrequenz $\omega = 1.539\, rad/s$ mit einer Dämpfung von $\zeta = 0.003$ erfaßt. Sowohl für die statische als auch für die dynamische Ausgangsgewichtung

$$W_1 = 2e3\,, \qquad W_2(s) = 1e4\frac{s+0.4}{s} \tag{B.34}$$

können die Ergebnisse in [23] bestätigt werden. Abbildung B.4 zeigt als Beleg das Bodediagramm von $K_{w\,2}(s)$.

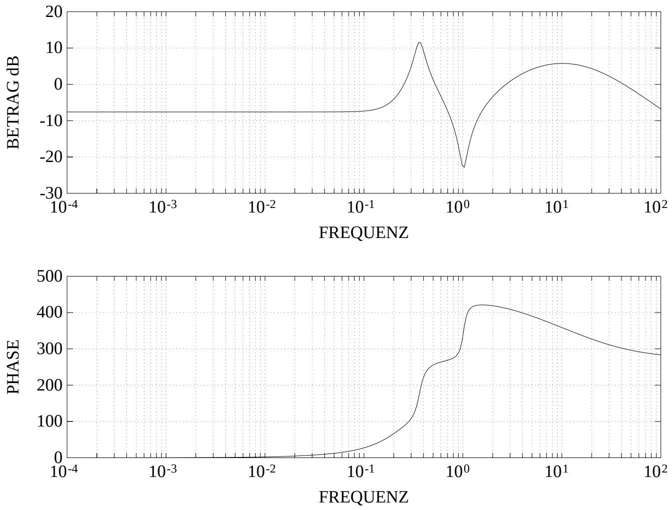


Abbildung B.4: Bodediagramm von $K_{w\,2}(s)$

Mit den Ergebnissen der Abschnitte B.1, B.2 und B.3 ist die korrekte Implementierung nachgewiesen. Darüber hinaus unterstreichen die kurzen Rechenzeiten die Leistungsfähigkeit des Werkzeugs. Testläufe für die umfangreicheren Mehrgrößenprobleme stehen jedoch noch aus.

Abbildungsverzeichnis

Literaturverzeichnis

[1] *Allgöwer, F.:* Regelung einer Zweistoffdestillationskolonne mittels H_∞-Optimierung. Diplomarbeit, Universität Stuttgart, 1987.

[2] *Ammon, D.:* Approximation und Generierung stationärer stochastischer Prozesse mittels linearer dynamischer Systeme. Diss., Universität Karlsruhe, 1989.

[3] *Cambridge Control Limited* MATLAB-MFD Toolbox User's Guide, 1. Ausgabe, Cambridge, 1988.

[4] *Dimitrov, M.:* Entwicklung eines aktiven Feder/Dämpfer-Systems. Porsche Entwicklungsbericht.

[5] *Doyle, J. C., Glover, K., Khargonekar, P. und Francis, B. A.:* State-space solutions to standard H_2 and H_∞control problems. IEEE Transactions on Automatic Control Vol.34,8 (1989), S. 831-847.

[6] *Englehart, M. J. und Smith, M. C.:* A Four-block Problem for H_∞ Design, Properties and Applications. Automatica Vol. 27,5 (1991), S. 811-818.

[7] *Engler, G.:* Entwicklung eines optimierten Zustandsreglers für ein aktives Fahrzeugfederungsmodell. Diplomarbeit, Fachhochschule Konstanz, 1989

[8] *Francis, B. A.:* A Course in H_∞Control Theory. Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[9] *Freudenberg, J. S.:* Analysis and design for ill-conditioned plants — part 1. lower bounds on the structured singular value. International Journal of Control 49 (1989), S. 851-871.

[10] *Freudenberg, J. S.:* Analysis and design for ill-conditioned plants — part 2. directionally uniform weightings and an example. International Journal of Control 49 (1989), S. 873-903.

[11] *Glover, K. und Doyle, J. C.:* State-space formulae for all stabilizing controllers that satisfy an H_∞-norm bound and relations to risk sensitivity. Systems & Control Letters Vol.11 (1988), S. 167-172.

[12] *Glover, K., Sefton, J. und McFarlane, D. C.:* A tutorial on loop shaping using H_∞robust stabilization. Proceedings of the 11th IFAC World Congress (1990), S. 94-103.

[13] *Green, M., Glover, K., Limebeer, D. und Doyle, J.:* A J-spectral factorization approach to H_∞control. SIAM Journal on Control and Optimization Vol.28,6 (1990), S. 1350-1371.

[14] *Green, M.:* H_∞controller synthesis by J-lossless coprime factorization. Proc. 29th IEEE Conference on Decision and Control, 1990.

[15] *Hara, S., Sugie, T. und Kondo, R.:* H_∞Control Problem with $j\omega$-axis Zeros. Automatica Vol. 28,1 (1992), S. 55-70.

[16] *Kailath, T.:* Linear Systems. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1980.

[17] *Krämer, W.:* Lageregelung elastischer Antriebe durch Ausgangsrückführungen. Diss., Universität Stuttgart, 1991

[18] *Maciejowski, J. M.:* Multivariable Feedback Design. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1989.

[19] *Maier, T.:* Methoden zur Analyse von Mehrgrößen-Regelungsstrukturen. Diplomarbeit, Universität Stuttgart, 1991.

[20] *The Math Works, Inc.* MATLAB-Control System Toolbox User's Guide, 1. Ausgabe, South Natick, MA, 1986.

[21] *The Math Works, Inc.* MATLAB-Robust-Control Toolbox User's Guide, South Natick, MA, 1988.

[22] *The Math Works, Inc.* PC-MATLAB User's Guide, South Natick, MA, 1988.

[23] *McFarlane, D. C. und Glover, K.:* Robust Controller Design Using Normalized Coprime Factor Plant Descriptions. Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[24] *Mustafa, D., Glover, K. und Limebeer D. J. N.:* Solutions to the H_∞General Distance Problem which minimize an Entropy Integral. Automatica Vol. 27,1 (1991), S. 193-199.

[25] *Patel, R. V. und Munro, N.:* Multivariable System Theory and Design. Pergamon Press, Oxford, 1982.

[26] *Postlehwaite, I., Tsai, M. und Gu, D.:* Weighting Function Selection in H_∞Design. Proceedings of the 11th IFAC World Congress (1990), S. 104-109.

[27] *Raisch, J. und Gilles, E.D.:* Reglerentwurf mittels H_∞-Minimierung — Eine Einführung. Zur Veröffentlichung eingereicht bei at-automatisierungstechnik.

[28] *Raisch, J., Lang, L. und Gilles, E.D.:* H_∞-Reglerentwurf für Zwei- und Dreistoffdestillationsprozesse. Zur Veröffentlichung eingereicht bei at-automatisierungstechnik.

[29] *Raisch, J.:* Entwurf dezentraler Regler im Frequenzbereich. Diss., Universität Stuttgart, 1991.

[30] *Rotra, M. A. und Khargonekar, P. P.:* H_2-optimal Control with an H_∞-constraint: The State Feedback Case. Automatica Vol. 27,2 (1991), S. 307-316.

[31] *Safonov, M. G.:* Future directions in H_∞robust control theory. Proceedings of the 11th IFAC World Congress (1990), S. 147-151.

[32] *Stulle, M.:* Vergleichende Untersuchung der H_∞-Optimierungsalgorithmen von Glover/Doyle und Francis. Diplomarbeit, Universität Stuttgart, 1990.

[33] *Trefzger, J. und Preschany, G.:* Semiaktive Dämpfung am Porsche 964. Porsche Entwicklungsbericht.

[34] *Zurmühl, R.:* Matrizen und ihre technischen Anwendungen. 4. neubearb. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, 1964.